Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 21 (1975)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN
Autor: Guenot, J. / Narasimhan, R.
Kapitel: §3. Fonctions holomorphes sur une courbe holomorphe non compacte
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-47334

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

morphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant ρ. La section s est représentée par des fonctions s_ι vérifiant les relations

$$s_\iota = g_{\iota\kappa}\, s_\kappa \,.$$

En particulier, les formes différentielles $\dfrac{d'' s_\iota}{2i\pi s_\iota}$ se recollent en une forme u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction f de $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f)\, s$ de ρ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel* $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$ *s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X, \Omega^{1,0}) \,.$$

L'injection canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ définit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbf{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle u de $\mathscr{C}^\infty(X, \Omega^1_{\mathbf{C}})$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et f dans $\mathscr{C}^\infty(X, \mathbf{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f \,.$$

On peut écrire

$$u = v + df \,.$$

Si de plus u est fermée, la forme différentielle v est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de α est égal à l'image de d'. C'est immédiat.

§ 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble A de X, on pose

$$\hat{A} = \{ x \in X \mid |f(x)| \leqslant \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X) \} \,.$$

On dit que A est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à $\hat{A}$.

LEMME 1. *Pour tout ensemble compact K de X, les ensembles $\hat{K}$ et $\tilde{K}$ sont égaux* [1]).

Soit x un point de $\tilde{K}\backslash K$ et soit V la composante connexe (relativement compacte) de x dans $X\backslash K$. Il est clair que ∂V est contenu dans K et le principe du maximum montre que l'on a

$$|f(x)| \leqslant \|f\|_{\partial V} \leqslant \|f\|_K$$

pour toute fonction holomorphe f sur X. Ceci montre que $\tilde{K}$ est contenu dans $\hat{K}$.

Réciproquement, soit x un point de $X\backslash\tilde{K}$. On vérifie aisément que l'on a

$$(K\cup\{x\})^{\sim} = \tilde{K}\cup\{x\}\,.$$

Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent que la fonction qui vaut 0 au voisinage de K et 1 au voisinage de x peut être uniformément approchée sur $\tilde{K}\cup\{x\}$ par une fonction holomorphe f sur X. Si l'approximation est bonne, on a

$$\|f\|_K \leqslant \|f\|_{\tilde{K}} < |f(x)|$$

ce qui montre que x n'appartient pas à $\hat{K}$.

THÉORÈME 1 (Runge). *Pour tout ensemble compact K de X, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'ensemble K est holomorphiquement convexe.

(2) L'ensemble $X\backslash K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X.

(3) Toute fonction holomorphe au voisinage de K peut être uniformément approchée sur K par des fonctions holomorphes sur X.

L'équivalence des deux premières conditions résulte du lemme 1. Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent qu'elles impliquent la troisième.

Supposons (3) vérifiée et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une composante connexe V de $X\backslash K$ relativement compacte dans X. On désigne par x un point de V et par h une fonction méromorphe sur X, holomorphe sur $X\backslash\{x\}$, possédant un pôle simple au point x (§ 2, lemme 1) Cette fonction peut être uniformément approchée sur K par des fonctions

---

[1]) Pour la définition de $\tilde{K}$, voir l'appendice II.

holomorphes sur X et puisque ∂V est contenu dans K, le principe du maximum montre que h peut être uniformément approchée sur $K \cup V$ par des fonctions holomorphes sur X, ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. *(1) Les fonctions holomorphes sur X séparent les points.*

(2) Pour tout point x de X, il existe une fonction holomorphe sur X de rang 1 *au point x.*

(3) Pour tout ensemble compact K de X, l'ensemble $\hat{K}$ est compact.

On désigne par x et y des points distincts de X. Il est clair que l'on a

$$\widetilde{\{x, y\}} = \{x, y\}$$

et la fonction qui vaut 0 (resp. 1) au point x (resp. y) peut être uniformément approchée sur $\{x, y\}$ par une fonction holomorphe sur X. Si l'approximation est bonne, elle prend des valeurs distinctes en x et y, ce qui démontre (1).

On désigne par x un point de X et par ϕ une carte de X dont le domaine contient x. Il existe un voisinage compact K de x dans le domaine de ϕ tel que $X \backslash K$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X. La fonction ϕ peut être uniformément approchée sur K par une fonction holomorphe f sur X. Si l'approximation est bonne, la fonction f est de rang 1 au point x (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4), ce qui démontre (2).

La dernière assertion résulte immédiatement du lemme 1 (appendice II, lemme 2).

Remarque 1.

On appelle *variété de Stein* toute variété holomorphe Y de dimension pure n, dénombrable à l'infini, vérifiant les conditions suivantes:

(1) Les fonctions holomorphes séparent les points de Y.

(2) Pour tout point x de Y, il existe une application holomorphe de Y dans $\mathbf{C}^n$ de rang n au point x.

(3) Pour toute partie compacte K de Y, l'ensemble

$$\hat{K} = \{ x \in Y \mid |u(x)| \leqslant \|u\|_K \text{ pour tout } u \in \mathcal{O}(Y) \}$$

est compact.

Le théorème 2 montre donc que toute courbe holomorphe ouverte dénombrable à l'infini est une variété de Stein.