

§3. Fonctions holomorphes sur une courbe holomorphe non compacte

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

morphe de rang 1 subordonné à ce recouvrement représentant ρ . La section s est représentée par des fonctions s_i vérifiant les relations

$$s_i = g_{i\kappa} s_\kappa.$$

En particulier, les formes différentielles $\frac{d'' s_i}{2i\pi s_i}$ se recollent en une forme u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega^{0,1})$. Le théorème 1 montre qu'il existe une fonction f de $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$ telle que

$$d'' f = u$$

et un calcul élémentaire montre que la section $\exp(-2i\pi f) s$ de ρ est holomorphe et partout non nulle ce qui démontre l'assertion.

PROPOSITION 1. *L'espace vectoriel $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{C})$ s'identifie canoniquement au conoyau de l'opérateur différentiel*

$$d' : \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X, \Omega^{1,0}).$$

L'injection canonique de $\mathcal{O}(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$ définit par passage au quotient une application linéaire α de $\mathbf{H}^0(X, \Omega^{1,0})$ dans $\mathbf{H}^1(X, \mathbb{C})$. Cette application est surjective. En effet, toute forme différentielle u de $\mathcal{C}^\infty(X, \Omega_{\mathbb{C}}^1)$ s'écrit

$$u = u_1 + d'' f$$

avec u_1 de bidegré $(1, 0)$ et f dans $\mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C})$. Posons

$$v = u_1 - d' f.$$

On peut écrire

$$u = v + d' f.$$

Si de plus u est fermée, la forme différentielle v est holomorphe ce qui démontre l'assertion. Il reste à voir que le noyau de α est égal à l'image de d' . C'est immédiat.

§ 3. FONCTIONS HOLOMORPHES SUR UNE COURBE HOLOMORPHE NON COMPACTE

Pour tout ensemble A de X , on pose

$$\hat{A} = \{x \in X \mid |f(x)| \leq \|f\|_A \text{ pour tout } f \in \mathcal{O}(X)\}.$$

On dit que A est *holomorphiquement convexe* s'il est égal à \hat{A} .

LEMME 1. *Pour tout ensemble compact K de X , les ensembles \hat{K} et \tilde{K} sont égaux ¹⁾.*

Soit x un point de $\tilde{K} \setminus K$ et soit V la composante connexe (relativement compacte) de x dans $X \setminus K$. Il est clair que ∂V est contenu dans K et le principe du maximum montre que l'on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\partial V} \leq \|f\|_K$$

pour toute fonction holomorphe f sur X . Ceci montre que \tilde{K} est contenu dans \hat{K} .

Réciproquement, soit x un point de $X \setminus \tilde{K}$. On vérifie aisément que l'on a

$$(K \cup \{x\})^{\sim} = \tilde{K} \cup \{x\}.$$

Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent que la fonction qui vaut 0 au voisinage de K et 1 au voisinage de x peut être uniformément approchée sur $\tilde{K} \cup \{x\}$ par une fonction holomorphe f sur X . Si l'approximation est bonne, on a

$$\|f\|_K \leq \|f\|_{\tilde{K}} < |f(x)|$$

ce qui montre que x n'appartient pas à \hat{K} .

THÉORÈME 1 (Runge). *Pour tout ensemble compact K de X , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *L'ensemble K est holomorphiquement convexe.*
- (2) *L'ensemble $X \setminus K$ n'a pas de composante connexe relativement compacte dans X .*
- (3) *Toute fonction holomorphe au voisinage de K peut être uniformément approchée sur K par des fonctions holomorphes sur X .*

L'équivalence des deux premières conditions résulte du lemme 1. Le lemme 5 de l'appendice II et le théorème de Behnke-Stein montrent qu'elles impliquent la troisième.

Supposons (3) vérifiée et raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une composante connexe V de $X \setminus K$ relativement compacte dans X . On désigne par x un point de V et par h une fonction méromorphe sur X , holomorphe sur $X \setminus \{x\}$, possédant un pôle simple au point x (§ 2, lemme 1) Cette fonction peut être uniformément approchée sur K par des fonctions

¹⁾ Pour la définition de \tilde{K} , voir l'appendice II.

holomorphes sur X et puisque ∂V est contenu dans K , le principe du maximum montre que h peut être uniformément approchée sur $K \cup V$ par des fonctions holomorphes sur X , ce qui est absurde.

THÉORÈME 2. (1) Les fonctions holomorphes sur X séparent les points.

(2) Pour tout point x de X , il existe une fonction holomorphe sur X de rang 1 au point x .

(3) Pour tout ensemble compact K de X , l'ensemble \hat{K} est compact.

On désigne par x et y des points distincts de X . Il est clair que l'on a

$$\{x, y\}^{\sim} = \{x, y\}$$

et la fonction qui vaut 0 (resp. 1) au point x (resp. y) peut être uniformément approchée sur $\{x, y\}$ par une fonction holomorphe sur X . Si l'approximation est bonne, elle prend des valeurs distinctes en x et y , ce qui démontre (1).

On désigne par x un point de X et par ϕ une carte de X dont le domaine contient x . Il existe un voisinage compact K de x dans le domaine de ϕ tel que $X \setminus K$ n'ait pas de composante connexe relativement compacte dans X . La fonction ϕ peut être uniformément approchée sur K par une fonction holomorphe f sur X . Si l'approximation est bonne, la fonction f est de rang 1 au point x (chap. I, § 1, théorème 1, corollaire 4), ce qui démontre (2).

La dernière assertion résulte immédiatement du lemme 1 (appendice II, lemme 2).

Remarque 1.

On appelle *variété de Stein* toute variété holomorphe Y de dimension pure n , dénombrable à l'infini, vérifiant les conditions suivantes:

(1) Les fonctions holomorphes séparent les points de Y .

(2) Pour tout point x de Y , il existe une application holomorphe de Y dans \mathbb{C}^n de rang n au point x .

(3) Pour toute partie compacte K de Y , l'ensemble

$$\hat{K} = \{x \in Y \mid |u(x)| \leq \|u\|_K \text{ pour tout } u \in \mathcal{O}(Y)\}$$

est compact.

Le théorème 2 montre donc que toute courbe holomorphe ouverte dénombrable à l'infini est une variété de Stein.