(1) Sur l'existence de certaines fonctions dérivables

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

Appendice I

(1) *Sur l'existence de certaines fonctions dérivables*

Lemme 1. *Il existe une fonction croissante* f *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, *nulle sur* $]-\infty, 0]$, *égale à* 1 *sur* $[1, +\infty[$.

Désignons par g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par

$$\begin{cases} g(x) = \exp(-x^{-2}) & \text{si } x > 0 \\ g(x) = 0 & \text{si } x \leqslant 0 . \end{cases}$$

Il est clair que g est indéfiniment dérivable. Il suffit alors de poser

$$f(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} g(t)\, g(1-t)\, dt\right) \big/ \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, g(1-t)\, dt\right).$$

Ceci a bien un sens puisque $g(t)\, g(1-t)$ est nul si $t \leqslant 0$ ou si $t \geqslant 1$, strictement positif si $0 < t < 1$.

Lemme 2. *Pour tout point* k *de* $\mathbf{Z}^n$ *et tout nombre réel* ε *strictement positif, il existe une fonction* $\alpha_{k,\varepsilon}$ *de* $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, *à valeurs positives, dont le support est contenu dans le cube de côté* 2ε *centré au point* εk *et telle que*

$$\sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

pour tout point x *de* $\mathbf{R}^n$.

Désignons par f une fonction vérifiant les conditions du lemme 1. On définit une fonction g de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ à valeurs positives en posant

$$g(x) = f(x+1) - f(x).$$

Le support de g est contenu dans l'intervalle $[-1, +1]$ et l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = g(x-j_0) + g(x-j_0-1)$$

pour tout point x de $\mathbf{R}$, en désignant par j_0 la partie entière de x (i.e. le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x). On en déduit que l'on a

$$\sum_{j \in \mathbf{Z}} g(x-j) = f(x-j_0+1) = 1 .$$

Il suffit alors de poser

$$\alpha_{k,\varepsilon}(x_1, \ldots, x_n) = g\left(\frac{x_1}{\varepsilon} - k_1\right) \ldots g\left(\frac{x_n}{\varepsilon} - k_n\right).$$

LEMME 3. *Pour tout ensemble compact K de $\mathbf{R}^n$ et tout voisinage U de K, il existe une fonction α de $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ à valeurs positives, dont le support est contenu dans U et égale à 1 sur K.*

Munissons $\mathbf{R}^n$ de la norme

$$|(x_1, \ldots, x_n)| = \max_{1 \leqq j \leqq n} |x_j|.$$

Pour tout nombre réel ε strictement positif, l'ensemble

$$K_\varepsilon = \{ x \in \mathbf{R}^n \mid \text{il existe } y \in K \text{ tel que } |x - y| \leqslant \varepsilon \}$$

est compact. Pour ε suffisamment petit, il est contenu dans U. Désignons par A l'ensemble des points k de $\mathbf{Z}^n$ pour lesquels le cube de centre εk et de côté 2ε rencontre K et posons

$$\alpha = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}.$$

Cette fonction est indéfiniment dérivable à valeurs positives. D'autre part, on a

$$\operatorname{supp}(\alpha) \subset \bigcup_{k \in A} \operatorname{supp}(\alpha_{k,\varepsilon}) \subset K_\varepsilon$$

et, pour tout point x de K,

$$\alpha(x) = \sum_{k \in A} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^n} \alpha_{k,\varepsilon}(x) = 1$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

LEMME 4. *Soit r un nombre réel strictement positif et soit C le cube de côté $2r$ et de centre l'origine dans $\mathbf{R}^n$. Pour tout point a de C, il existe un difféomorphisme u de $\mathbf{R}^n$ sur lui-même tel que*

$$u(0) = a \quad \text{et} \quad u|_{\mathbf{R}^n \setminus C} = 1_{\mathbf{R}^n \setminus C}.$$

On se ramène aisément au cas où n est égal à 1. On désigne par α une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbf{R}$ dont le support est contenu dans $[0, r]$ telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(t)\, dt = a \quad \text{et} \quad |\alpha| < 1$$

(une telle fonction existe en vertu du lemme 3, car $|a|$ est strictement inférieur à r). Il suffit alors de poser

$$u(x) = x - \int_{-\infty}^{x} (\alpha(t) - \alpha(-t))\, dt.$$