

(3) Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **21 (1975)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Démontrons par récurrence que \mathcal{U}_j est dénombrable. Si \mathcal{U}_j est dénombrable, la réunion de ses éléments est une variété topologique U_j de type dénombrable et, pour tout indice ι , la famille \mathcal{F}_ι des composantes connexes de $u^{-1}(W_\iota)$ qui rencontrent U_j est dénombrable (propriété (*)), ce qui démontre l'assertion puisque \mathcal{U}_{j+1} est contenu dans la réunion des \mathcal{F}_ι .

Démontrons finalement par l'absurde que \mathcal{U} est la réunion des \mathcal{U}_j . Désignons par U la réunion des éléments de tous les \mathcal{U}_j et par V la réunion des éléments de \mathcal{U} n'appartenant à aucun des \mathcal{U}_j . Les ensembles U et V sont des ouverts non vides recouvrant X . Ils sont disjoints par construction ce qui contredit la connexité de X et démontre du même coup le théorème.

(3) *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe*

PROPOSITION 1. *Le groupe fondamental d'une variété topologique compacte connexe X est de génération finie.*

Recouvrons X par des domaines de cartes V_0, \dots, V_n isomorphes à des boules, centrées en des points x_0, \dots, x_n . Pour tout entier j compris entre 0 et n , on désigne par U_j une boule de centre x_j relativement compacte dans V_j et l'on suppose que U_0, \dots, U_n recouvrent encore X .

Pour tout couple d'entiers (j, k) , on recouvre $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ par des domaines de cartes $U_1^{j,k}, \dots, U_{n_{j,k}}^{j,k}$ isomorphes à des boules, centrées en des points $x_1^{j,k}, \dots, x_{n_{j,k}}^{j,k}$ de $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$. Remarquons que $n_{j,k}$ est nul si $\bar{U}_j \cap \bar{U}_k$ est vide.

Pour tout entier l compris entre 1 et $n_{j,k}$, on désigne par $\alpha_l^{j,k}$ un chemin joignant x_j à $x_l^{j,k}$ dans V_j et par $\beta_l^{j,k}$ un chemin joignant $x_l^{j,k}$ à x_k dans V_k . On pose

$$\gamma_l^{j,k} = \alpha_l^{j,k} \beta_l^{j,k}.$$

Nous allons montrer que tout lacet c de X au point x_0 est homotope à un produit de chemins $\gamma_l^{j,k}$, ce qui démontrera l'assertion.

Le lacet c se décompose en un produit de chemins c_1, \dots, c_p dont chacun est contenu dans l'un des ouverts U_0, \dots, U_n .

Désignons par c_m et c_{m+1} deux tels chemins. Le premier joint un point a_{m-1} à un point a_m dans U_j , le second le point a_m à un point a_{m+1} dans U_k . Il existe un ensemble ouvert $U_l^{j,k}$ contenant a_m . On choisit alors un chemin α joignant a_{m-1} à x_j dans U_j , un chemin β joignant x_k à a_{m+1} dans U_k et un chemin γ joignant $x_l^{j,k}$ à a_m dans $U_l^{j,k}$. Le chemin $\alpha \alpha_l^{j,k} \gamma$ est homotope au chemin c_m dans V_j et le chemin $\gamma^{-1} \beta_l^{j,k} \beta$ est homotope au chemin c_{m+1} dans V_k . Par conséquent, le chemin $\alpha \gamma_l^{j,k} \beta$ est homotope au chemin $c_m c_{m+1}$ dans X . On en déduit aisément l'assertion.