

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 21 (1975)  
**Heft:** 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION A LA THÉORIE DES SURFACES DE RIEMANN  
**Autor:** Guenot, J. / Narasimhan, R.  
**Kapitel:** (1) Résultants et discriminants  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-47334>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 18.04.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

### APPENDICE III

#### (1) Résultants et discriminants

Désignons par  $A$  un anneau intègre (commutatif avec élément unité) et par  $K$  son corps des fractions.

LEMME 1. Soit  $M$  un  $A$ -module libre de type fini et soit  $u$  un endomorphisme de  $M$ . Si  $u$  est surjectif, c'est un isomorphisme.

L'application  $u \otimes 1$  est un endomorphisme surjectif de  $M \otimes_A K$ , donc un isomorphisme puisque  $M \otimes_A K$  est un espace vectoriel de dimension finie. On conclut en remarquant que l'application canonique de  $M$  dans  $M \otimes_A K$  est injective.

Pour tout entier naturel  $m$ , on désigne par  $A_m$  l'ensemble des polynômes de  $A[T]$  de degré strictement inférieur à  $m$ . C'est un  $A$ -module libre de rang  $m$ .

Soient  $p$  et  $q$  deux polynômes de  $A[T]$  de degré  $m$  et  $n$  respectivement. On désigne par  $\phi(p, q)$  l'application  $A$ -linéaire de  $A_n \times A_m$  dans  $A_{m+n}$  définie par

$$\phi(p, q)(u, v) = up + vq.$$

Les polynômes

$$(1, 0), \dots, (T^{n-1}, 0), (0, 1), \dots, (0, T^{m-1}) \quad (\text{resp. } 1, \dots, T^{m+n-1})$$

forment une base de  $A_n \times A_m$  (resp.  $A_{m+n}$ ). On appelle *résultant de  $p$  et  $q$*  et l'on désigne par  $\text{Rés}(p, q)$  le déterminant de l'application  $\phi(p, q)$  exprimé dans ces bases. Si l'on pose

$$p = p_m + p_{m-1}T + \dots + p_0T^m \quad \text{et} \quad q = q_n + q_{n-1}T + \dots + q_0T^n$$

le résultant de  $p$  et  $q$  est donné par la formule

$$\text{Rés}(p, q) = \left| \begin{array}{ccccccccc} p_m & 0 & . & . & 0 & q_n & . & 0 & 0 \\ . & p_m & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & q_n & . \\ . & . & . & . & 0 & . & . & . & q_n \\ p_0 & . & . & . & p_m & . & . & . & . \\ 0 & p_0 & . & . & . & q_0 & . & . & . \\ . & 0 & . & . & . & 0 & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & q_0 & . \\ 0 & 0 & . & . & p_0 & 0 & . & 0 & q_0 \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} m+1 \\ \\ \\ \\ n-1 \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_n \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_m$

Il résulte de cette définition que  $\text{Rés}(p, q)$  est un polynôme homogène de degré  $n$  en  $p_0, \dots, p_m$ , homogène de degré  $m$  en  $q_0, \dots, q_n$ . Son terme de plus haut degré en  $p_m$  et  $q_0$  est  $p_m^n q_0^m$ .

Pour tout homomorphisme  $\rho$  de  $A$  dans un anneau intègre  $B$ , on a

$$\text{Rés}(\rho(p), \rho(q)) = \rho(\text{Rés}(p, q)).$$

On dit que  $p$  et  $q$  sont *étrangers* (ou aussi *premiers entre eux*) s'ils engendrent l'anneau  $A[T]$ .

LEMME 2. On suppose que l'un au moins des coefficients  $p_0$  ou  $q_0$  est inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (1) Les polynômes  $p$  et  $q$  sont étrangers.
- (2) L'application  $\phi(p, q)$  est un isomorphisme.
- (3) Le résultant de  $p$  et  $q$  est inversible dans  $A$ .

Il suffit de montrer que les conditions (1) et (2) sont équivalentes.

Supposons par exemple  $q_0$  inversible et (1) vérifiée. En particulier, pour tout polynôme  $r$  de  $A_{m+n}$ , on a

$$r = up + vq$$

avec  $u$  et  $v$  dans  $A[T]$ . La division euclidienne des polynômes montre que l'on a

$$u = u'q + u'' \quad \text{avec} \quad \deg(u'') < n.$$

On a alors

$$r = u''p + (u' + v)q \quad \text{avec} \quad \deg(u' + v) < m.$$

Ceci montre que l'application  $\phi(p, q)$  est surjective. Le lemme 1 montre que c'est un isomorphisme.

Réciproquement, supposons (2) vérifiée. On peut écrire

$$1 = up + vq$$

pour certains polynômes  $u$  et  $v$  de  $A_n$  et  $A_m$  respectivement. Ceci montre que  $p$  et  $q$  sont étrangers.

LEMME 3. *Supposons  $A$  factoriel. Si les polynômes  $p$  et  $q$  sont moniques, irréductibles et distincts, ils sont étrangers.*

Raisonnons par l'absurde. Il existe alors des polynômes  $u$  et  $v$  non nuls de degré strictement inférieur à  $n$  et  $m$  respectivement tels que

$$up + vq = 0$$

(lemme 2). Le polynôme  $q$  étant irréductible, il n'appartient pas à l'idéal  $(p)$ . Le polynôme  $v$  non plus pour des raisons de degré. Puisque  $A[T]$  est factoriel et le polynôme  $p$  irréductible, l'idéal  $(p)$  est premier, ce qui est absurde.

Soit  $L$  une clôture algébrique de  $K$ . On peut écrire

$$p = p_0 \prod_{1 \leq j \leq m} (T - \alpha_j) \quad \text{et} \quad q = q_0 \prod_{1 \leq k \leq n} (T - \beta_k)$$

pour certains éléments  $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n$  de  $L$ . La fonction

$$S = p_0^n q_0^m \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\beta_k - \alpha_j)$$

est symétrique par rapport à  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  (resp.  $\beta_1, \dots, \beta_n$ ). C'est donc une fonction polynomiale de  $p_0, \dots, p_m$  et  $q_0, \dots, q_n$ . Remarquons que l'on a

$$S = (-1)^{mn} p_0^n \prod_{1 \leq j \leq m} q(\alpha_j) = q_0^m \prod_{1 \leq k \leq n} p(\beta_k).$$

En particulier, le polynôme  $S$  est homogène de degré  $n$  en  $p_0, \dots, p_m$  et homogène de degré  $m$  en  $q_0, \dots, q_n$ . Son terme de plus haut degré en  $p_m$  et  $q_0$  est  $p_m^n q_0^m$ .

Les coefficients des polynômes  $p$  et  $q$  sont liés aux racines par les formules

$$p_j = (-1)^j \sigma_j(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad \text{et} \quad q_j = (-1)^j \sigma_j(\beta_1, \dots, \beta_n)$$

où  $\sigma_j$  désigne la  $j^e$  fonction symétrique élémentaire à  $m$  ou  $n$  indéterminées. Ceci montre que  $\text{Rés}(p, q)$  est une fonction polynomiale en  $p_0, \alpha_1, \dots, \alpha_m, q_0, \beta_1, \dots, \beta_n$ . Cette fonction polynomiale est divisible par  $\beta_k - \alpha_j$ . En effet, si  $\alpha_j$  est égal à  $\beta_k$ , les polynômes  $p$  et  $q$  ne sont pas étrangers (lemme 2).

Il résulte de toutes ces remarques que l'on a la formule

$$\text{Rés}(p, q) = p_0^n q_0^m \prod_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} (\beta_k - \alpha_j)$$

En particulier, le résultant de  $p$  et  $q$  s'annule si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- (1) L'un des coefficients  $p_0$  ou  $q_0$  est nul.
- (2) Les polynômes  $p$  et  $q$  ont une racine commune dans  $L$ .

Soit  $p$  un polynôme de  $A[T]$  et soit  $p'$  le polynôme dérivé  $\frac{\partial p}{\partial T}$ . On appelle *discriminant de  $p$*  et l'on désigne par  $\text{Dis}(p)$  le résultant de  $p$  et  $p'$ . Avec les notations précédentes, on a

$$p' = p_0 \sum_{1 \leq j \leq m} (T - \alpha_1) \dots (T - \alpha_j) \dots (T - \alpha_m)$$

et par conséquent,

$$p'(\alpha_k) = p_0 \prod_{\substack{1 \leq j \leq m \\ j \neq k}} (\alpha_k - \alpha_j).$$

La formule précédente montre que l'on a

$$\text{Dis}(p) = p_0^{2m-1} \prod_{\substack{1 \leq j, k \leq m \\ j \neq k}} (\alpha_j - \alpha_k)$$

En particulier, le discriminant de  $p$  s'annule si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- (1) Le coefficient dominant de  $p$  est nul.
- (2) Le polynôme  $p$  a une racine double dans  $L$ .

LEMME 4. *Supposons  $A$  factoriel. Si le polynôme  $p$  est monique irréductible, le discriminant  $\text{Dis}(p)$  est non nul.*

Raisonnons par l'absurde en supposant que  $\text{Dis}(p)$  est nul, donc non inversible dans  $K$ . Le lemme 2 montre qu'il existe deux polynômes  $u$  et  $v$  de degré strictement inférieur à  $m-1$  et  $m$  respectivement dans  $K[T]$  tels que

$$up + vp' = 0.$$

Quitte à multiplier cette égalité par un élément convenable de  $A$ , on peut supposer que  $u$  et  $v$  appartiennent à  $A[T]$ . On procède alors comme dans le lemme 3.