

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 23 (1977)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE
Autor: Fontaine, André
Kapitel: I. Itération d'un endomorphisme (singulier)
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-48921>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

PROFILS ET RÉDUITE TRANSJORDANIENNE D'UNE MATRICE CARRÉE

par André FONTAINE

I. ITÉRATION D'UN ENDOMORPHISME (SINGULIER)

Rappel. Propriétés classiques des noyaux itérés

E_n étant un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{C}$, soit g un endomorphisme de E_n dans E_n ; nous le supposons singulier, c'est-à-dire $\dim \text{Ker}(g) \geq 1$; $\text{Ker}(g)$ est le sous-espace propre afférent à la valeur propre $\lambda = 0$ de g .

A) On considère la suite des « noyaux itérés de g »:

$$(1) \quad \text{Ker}(g) = K_1, \text{Ker}(g^2) = K_2, \dots, \text{Ker}(g^q) = K_q, \dots$$

On sait que ces noyaux sont emboîtés, $K_q \subset K_{q+1}$. La suite des dimensions de ces noyaux est croissante:

$$(2) \quad d_1 = \dim(K_1) \leq d_2 = \dim(K_2) \leq \dots \leq d_q = \dim(K_q) \leq \dots \leq n.$$

B) Il existe un unique entier p tel que

$$d_1 < d_2 < \dots < d_{p-1} < d_p = d_{p+1} = d_{p+2} = \dots, \quad \text{c'est-à-dire}$$

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset K_{p-1} \subset K_p = K_{p+1} = K_{p+2} = \dots$$

(inclusion au sens strict).

$d_p = d$ est la « dimension maximum des noyaux itérés » et l'on démontre que $d = r$, r étant l'ordre de multiplicité de la valeur propre $\lambda = 0$, c'est-à-dire l'ordre de multiplicité de la racine $\lambda = 0$ de l'équation caractéristique de g [cf. par exemple: R. Godement, *Cours d'Algèbre*, Hermann, Paris, 1965].

C) On a ainsi les inéquations $0 < p \leq d = r \leq n$.

p se nommera l'indice de g pour la valeur propre $\lambda = 0$; c'est le nombre minimum d'itérations à faire sur g pour que la dimension du noyau de l'itéré atteigne son maximum $d = r$.

D) Le profil d'un endomorphisme singulier g est formé des p nombres $\{d_1, d_2, \dots, d_{p-1}, d_p = r\}$. Cette suite, extraite de (2), est strictement croissante. Concrètement, on prendra dans un repère orthonormé les points $M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1}, \dots$; le point M_q ayant pour coordonnées $x_q = q \in \mathbb{N}, y_q = d_q$. On y adjoindra le point $M_0(0, 0)$ qui correspond à $g^0 = e$, endomorphisme identique, $d_0 = 0$. La ligne brisée de sommets successifs $M_0 = 0, M_1, M_2, \dots, M_p, M_{p+1} \dots$ prendra également le nom de profil de l'endomorphisme singulier g . A partir du profil de g , on construira la suite de ses sauts

$$(3) \quad \{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_q, \dots\} \text{ où } \delta_q = d_q - d_{q-1} \\ (\text{en particulier } \delta_1 = d_1 - d_0 = d_1).$$

Nous allons établir que cette suite des sauts est décroissante; c'est le

THÉORÈME DE LA CONVEXITÉ. $\delta_{q+1} \leq \delta_q$.

Soit S_{q+1} un sous-espace supplémentaire de K_q sur K_{q+1} . Considérons l'image $g(S_{q+1})$ de S_{q+1} par g .

1°) Soit x un vecteur non nul de S_{q+1} . On a $g^{q+1}(x) = 0$ et $g^q(x) \neq 0$ donc $g(x) \in K_q$ et $g(x) \notin K_{q-1}$, d'où

$$(4) \quad g(S_{q+1}) \subset K_q; \quad g(S_{q+1}) \cap K_{q-1} = \{0\}.$$

On déduit de (4)

$$(5) \quad \dim g(S_{q+1}) \leq d_q - d_{q-1}.$$

2°) Montrons que la restriction de g à S_{q+1} est *injective*.

Soit $\{v_1, v_2, \dots, v_\alpha\}$ où $\alpha = \delta_{q+1} = d_{q+1} - d_q$ une base de S_{q+1} . Une partie génératrice de $g(S_{q+1})$ est $\Sigma = \{g(v_1), g(v_2), \dots, g(v_\alpha)\}$. Si l'on montre que Σ est une partie libre, le résultat proposé sera établi.

Soient α scalaires $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_\alpha$ tels que

$$\rho_1 g(v_1) + \rho_2 g(v_2) + \dots + \rho_\alpha g(v_\alpha) = 0.$$

On a donc $W = \rho_1 v_1 + \rho_2 v_2 + \dots + \rho_\alpha v_\alpha \in K_1$ et aussi $W \in K_1 \cap S_{q+1}$.

Mais $K_1 \cap S_{q+1} \subset K_q \cap S_{q+1} = \{0\}$, d'où $W = 0$ et $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_\alpha = 0$, ce qui établit que Σ est libre.

Il en résulte

$$(6) \quad \dim g(S_{q+1}) = d_{q+1} - d_q$$

Rapprochons (5) et (6): $d_{q+1} - d_q \leq d_q - d_{q-1}$ ou $\delta_{q+1} \leq \delta_q$, d'où pour la suite des sauts

$$\delta_1 = d_1 \geq \delta_2 \geq \dots \geq \delta_{p-1} \geq \delta_p > 0 = \delta_{p+1} = \delta_{p+1} = \dots$$

3°) La ligne brisée profil de g pour $\lambda = 0$ est convexe car $\frac{d_q - d_{q-1}}{1} \geq \frac{d_{q+1} - d_q}{1}$ s'écrit pente $(M_{q-1}, M_q) \geq$ pente (M_q, M_{q+1}) .

II. ANALYSE D'UN ENDOMORPHISME f . THÉORÈMES PRÉLIMINAIRES

A) *Notations.* Soit le polynôme caractéristique de f

$$P(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} (\lambda_2 - \lambda)^{r_2} \dots (\lambda_s - \lambda)^{r_s} [r_1 + r_2 + \dots + r_s = n].$$

Le spectre de f s'écrit: $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{r_1}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{r_2}, \dots, \underbrace{\lambda_s, \dots, \lambda_s}_{r_s}$

liste obtenue en répétant chacune des s valeurs propres distinctes à son ordre de multiplicité.

Considérons les endomorphismes singuliers $g_v = f - \lambda_v e$ ($v = 1, 2, \dots, s$), e étant l'endomorphisme identique; g_v admet la valeur propre 0, à l'ordre r_v . Pour chaque v , on détermine le profil de g_v pour la valeur propre 0, soit $\{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\}$ où $d_q = \dim \text{Ker}(g_v^q)$. Le noyau maximum de g_v sera désigné par K^v [$K^v = \text{Ker}(g_v^{p_v})$]. On a:

$$\begin{cases} K_1^v \subset K_2^v \subset \dots \subset K_{p_v}^v = K^v = K_{p_v+1}^v = \dots \\ d_1^v < d_2^v < \dots < d_{p_v}^v = d^v = d_{p_v+1}^v = \dots \end{cases}$$

Inclusions et inéquations au sens strict. On sait que $d^v = r_v$.

Par définitions;

$$\begin{cases} 1^\circ) \{d_1^v, d_2^v, \dots, d_{p_v}^v\} = \text{profil de } g_v \text{ pour } \lambda = 0 \\ \quad \quad \quad = \text{profil de } f \text{ pour } \lambda = \lambda_v \\ 2^\circ) p_v = \text{indice de } f \text{ pour la valeur propre } \lambda_v. \end{cases}$$

B) THÉORÈME DE LA DISJONCTION. Ce théorème classique, dont la démonstration ne sera pas reproduite, s'exprime par

$$\alpha \neq \beta \Rightarrow K^\alpha \cap K^\beta = \{0\}$$

(voir, par exemple, la référence antérieure).