LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL

Autor(en): **André, Michel**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1977)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-48929

LA (2p+1)-ÈME DÉVIATION D'UN ANNEAU LOCAL [1]

par Michel ANDRÉ

Par un argument de résolution minimale ou par un argument d'algèbre de Hopf à puissances divisées, on sait que la série de Poincaré d'un anneau local noethérien A a la forme suivante

$$P_A(x) = \Sigma \beta_j x^j = (1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2} \ldots .$$

Les nombres de Betti β_j sont les dimensions des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ sur le corps résiduel K, et les nombres positifs ou nuls ε_i sont appelés les déviations de l'anneau local. Par ailleurs la théorie du complexe cotangent, avec l'homologie qui en découle, fournit d'autres nombres positifs ou nuls δ_i qui sont appelés les invariants de l'anneau local et qui sont égaux aux dimensions des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$.

Grâce à un théorème de convergence de D. Quillen, on peut appliquer la théorie du produit symétrique et constater que l'on a l'égalité $\delta_i = \varepsilon_i$ sans restriction en caractéristique nulle et avec la restriction $i \leqslant 2p$ en caractéristique positive. Un rappel de la démonstration sera donné ci-dessous. Le premier degré intéressant en caractéristique p est donc égal à $2p+1$. On a alors toujours une inégalité $\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1}$. Il y a même égalité si l'idéal maximal M est petit dans l'un des deux sens suivants: ou bien l'idéal M^p est nul ou bien l'idéal M a $2p-1$ générateurs. Il se pose le problème de l'égalité en toute généralité.

Une analyse de la situation fait revenir à la théorie de l'homologie des produits symétriques et des espaces d'Eilenberg-Mac Lane. Dans la terminologie de Cartan, c'est le mot $\sigma\gamma\sigma\sigma$ qui concerne tout spécialement le degré $2p+1$. En topologie, il lui correspond l'opération cohomologique

$$P : H^3 \to H^{2p+1}$$

fortement liée aux puissances p-èmes des éléments de degré 2 et aux isomorphismes de suspension. De manière analogue, une application canonique va apparaître

$$\pi : T_3(A, K, K) \to T_{2p+1}(A, K, K)$$

[1]) Présenté au Colloque de Topologie et d'Algèbre, Zurich, avril 1977.

où $T_i(A, K, K)$ est l'espace vectoriel des éléments indécomposables de $\operatorname{Tor}_i^A(K, K)$. Mais alors l'égalité $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ a lieu si et seulement si π est l'application nulle. Un exemple va montrer que cette propriété n'est pas toujours satisfaite.

L'espace vectoriel $T_3(A, K, K)$, qui concerne la notion d'intersection complète, est un quotient du deuxième module d'homologie à la Koszul. Il est donc possible de remplacer la paire quelconque (A, α), où α appartient à $T_3(A, K, K)$, par une paire générique $(\tilde{A}, \tilde{\alpha})$. La situation se simplifie maintenant: ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ est nul et alors π est toujours nul et δ_{2p+1} est toujours égal à ε_{2p+1}, ou bien l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul et alors $\tilde{A}$ fournit l'exemple recherché d'un anneau avec δ_{2p+1} strictement inférieur à ε_{2p+1}. Le calcul montre que l'élément $\tilde{\pi}(\tilde{\alpha})$ n'est pas nul. Il faut donc se contenter de la propriété suivante:

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \varepsilon_3 .$$

Le cas où ε_3 est nul n'apporte rien de nouveau. En effet l'anneau A est alors une intersection complète, ce qui oblige la déviation ε_{2p+1} et l'invariant δ_{2p+1} à être nuls.

Introduction

Il est possible de résoudre projectivement le A-module K par une A-algèbre simpliciale P qui est libre en chaque degré, comme A-algèbre. Le produit tensoriel $P \otimes_A K$ est alors une K-algèbre simpliciale R qui est libre en chaque degré, comme K-algèbre. L'espace vectoriel $H_n[R]$ est évidemment toujours égal à l'espace vectoriel $\operatorname{Tor}_n^A(K, K)$. De plus la K-algèbre simpliciale R est munie d'une augmentation $\rho: R \to K$. Son noyau I est un idéal simplicial de l'anneau simplicial R. Il est utile d'en considérer les puissances successives I^k, calculées degré par degré. En particulier le quotient I/I^2 est un K-module simplicial, dont le complexe correspondant est par définition le complexe cotangent de la A-algèbre K. L'espace vectoriel $H_n[I/I^2]$, qui est l'espace vectoriel $H_n(A, K, K)$ de la théorie de l'homologie des algèbres commutatives, a une dimension finie δ_n, l'anneau local A étant supposé noethérien.

Dénotons par S^r le foncteur « r-ème produit symétrique » de la catégorie des K-modules et par S leur somme directe, qui est le foncteur « algèbre symétrique». Degré par degré, on prolonge ces foncteurs à la catégorie des K-modules simpliciaux. Si M est un K-module simplicial, alors l'homologie $H[SM]$ a une structure naturelle d'algèbre de Hopf à puissances divisées et par conséquent sa série de Poincaré a la forme suivante

$$\Sigma b_j x^j = (1+x)^{e_1}(1-x^2)^{-e_2} \ldots .$$

Les nombres de Betti b_j sont les dimensions des espaces vectoriels $H_j[SM]$ et les nombres positifs ou nuls e_i peuvent être calculés explicitement, soit par voie topologique selon la méthode de Dold-Thom, soit par voie algébrique selon la méthode de M.-A. Nicollerat. Les nombres e_i se calculent à l'aide des nombres m_i qui sont les dimensions des espaces vectoriels $H_i[M]$. Le résultat partiel suivant est suffisant ici: d'une part e_i est égal à m_i pour $i \leqslant 2p$ et d'autre part e_{2p+1} est égal à la somme $m_{2p+1} + m_3$.

Comme la K-algèbre augmentée R est libre en chaque degré, il existe pour tout r un isomorphisme de K-modules simpliciaux de $S^r(I/I^2)$ sur I^r/I^{r+1}. Par conséquent l'homologie du K-module simplicial I/I^2 (formée des espaces vectoriels $H_i(A, K, K)$ connus par leurs dimensions δ_i) détermine complètement l'homologie des K-modules simpliciaux I^r/I^{r+1}. Par ailleurs l'homologie du K-module simplicial $I^0 = R$ (formée des espaces vectoriels $\mathrm{Tor}_j^A(K, K)$ connus par leurs dimensions β_j données par les déviations ε_i) peut être filtrée par les images de l'homologie des K-modules simpliciaux I^r. Il reste donc à faire le passage de l'homologie du K-module simplicial I^r/I^{r+1} à l'homologie du K-module simplicial I^r. La situation se présente de manière correcte (on a en fait une suite spectrale du premier quadrant) grâce au théorème de convergence de D. Quillen. On a $H_m[I^n]$ nul pour toute paire $m < n$, comme le démontre un argument de nature purement simpliciale.

Les 2p premières déviations

Grâce au théorème d'Eilenberg-Zilber et grâce au foncteur F^r, noyau de la transformation naturelle du foncteur $\otimes^r$ sur le foncteur S^r, on peut démontrer le résultat utile suivant. Si un épimorphisme λ entre des K-modules simpliciaux connexes donne des épimorphismes $H_k[\lambda]$ pour $k = 0,\ldots,n$, alors il donne des épimorphismes $H_k[S^r\lambda]$ pour $k = 0,\ldots, n+1$ et pour r quelconque, sauf peut-être pour $k = n+1$ et $r = 1$, bien entendu. On peut appliquer ce résultat à l'homomorphisme canonique de I sur I/I^2.

On va utiliser l'homomorphisme canonique de $H_n\,[I]$ dans $H_n\,[I/I^2]$, autrement dit de $\mathrm{Tor}_n^A(K, K)$ dans $H_n(A, K, K)$, pour n différent de 0. Les produits non-triviaux de $H\,[I]$ proviennent de l'image de l'homomorphisme de $H\,[I] \otimes H\,[I]$ dans $H\,[I]$, qui passe au travers de $H\,[I^2]$ et les puissances divisées de $H\,[I]$ proviennent de l'image de l'application partiellement définie de $H\,[I]$ dans $H\,[I]$, qui passe au travers de $H\,[I^p]$ donc de $H\,[I^2]$. Cela étant remarqué, on peut donc définir un homomorphisme canonique et utile

$$\eta_n : T_n(A, K, K) \to H_n(A, K, K)$$

avec l'isomorphisme de définition

$$T_n(A, K, K) \cong \mathrm{Tor}_n^A(K, K) / J_n$$

où J_n est le sous-espace vectoriel engendré par tous les produits non-triviaux de degré n et par toutes les puissances divisées de degré n. Comme ici le degré n est au plus égal à $2p+1$, les puissances divisées interviennent dans le seul degré $2p$. Par la théorie des algèbres de Hopf à puissances divisées, il est clair que l'espace vectoriel $T_n(A, K, K)$ a la dimension ε_n. Par suite on a une inégalité $\delta_n \leqslant \varepsilon_n$ si η_n est un épimorphisme et une égalité $\delta_n = \varepsilon_n$ si η_n est un isomorphisme. Appelons Ω_n le conoyau de l'homomorphisme η_n et ω_n la dimension de Ω_n.

Considérons la condition C_n suivante: d'une part η_k est un isomorphisme pour $k \leqslant n-1$ et d'autre part η_n est un épimorphisme. On a donc des homomorphismes surjectifs de $H_k\,[S^r(I)]$ sur $H_k\,[S^r(I/I^2)]$. Comme ils passent au travers de $H_k\,[I^r]$, on obtient des homomorphismes surjectifs de $H_k\,[I^r]$ sur $H_k\,[I^r/I^{r+1}]$ pour $k \leqslant n+1$ et pour $r \geqslant 0$, sauf peut-être pour $k = n+1$ et pour $r = 1$. Il en découle une suite exacte pour $r \neq 1$

$$0 \to H_n[I^{r+1}] \to H_n[I^r] \to H_n[I^r/I^{r+1}] \to 0$$

et pour $r = 1$ il faut remplacer le 0 de gauche par $0 \to \Omega_{n+1}$ pour obtenir encore une suite exacte. Grâce au théorème de convergence, on peut sommer sur r et obtenir un isomorphisme non-canonique

$$H_n[S(I/I^2)] \cong H_n[R] + \Omega_{n+1}\,.$$

La dimension du H_n de droite est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\varepsilon_1}(1-x^2)^{-\varepsilon_2} \dots (1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\varepsilon_n}$$

et la dimension du H_n de gauche est donnée par le coefficient de x^n dans la série

$$(1+x)^{\delta_1}(1-x^2)^{-\delta_2}\dots(1+(-1)^{n+1}x^n)^{(-1)^{n+1}\delta_n}$$

cette fois seulement si n est au plus $2p$. Mais comme δ_k et ε_k sont égaux pour $k < n$, il reste une égalité simple $\delta_n = \varepsilon_n + \omega_{n+1}$. Comme par ailleurs on a une inégalité $\varepsilon_n \geqslant \delta_n$ due à la surjectivité de η_n, cela ne se peut que sous la forme $\delta_n = \varepsilon_n$ (et η_n est un isomorphisme) et $\omega_{n+1} = 0$ (et η_{n+1} est un épimorphisme). On peut donc démontrer la condition C_n par induction sur $n \leqslant 2p+1$ et les nombres δ_n et ε_n sont égaux pour $n \leqslant 2p$ (ou quelconque en caractéristique nulle).

La 2p + 1-ème déviation

Nous venons de le constater, l'homomorphisme η_{2p+1} est une surjection. Par conséquent on a une première inégalité, à savoir $\varepsilon_{2p+1} \geqslant \delta_{2p+1}$. Ce qui a été fait ci-dessus pour $n \leqslant 2p$ peut être répété en partie pour $n = 2p+1$. Mais alors la dimension du n-ème module d'homologie de $S(I/I^2)$ est donné par le coefficient de x^{2p+1} dans la série modifiée suivante

$$(1+x)^{\delta_1}\dots(1-x^{2p})^{-\delta_{2p}}(1+x^{2p+1})^{\delta_{2p+1}+\delta_3}.$$

Cela conduit finalement à l'égalité simple

$$\delta_{2p+1} + \delta_3 = \varepsilon_{2p+1} + \omega_{2p+2}$$

Il en découle bien l'inégalité annoncée

$$\delta_{2p+1} \leqslant \varepsilon_{2p+1} \leqslant \delta_{2p+1} + \delta_3 .$$

En particulier les homomorphismes η_{2p+1} et η_{2p+2} sont tous deux des isomorphismes dans le seul cas dégénéré où l'invariant δ_3 est nul. Il s'agit du cas où l'anneau local A, complété si nécessaire, est un anneau d'intersection complète, ce qui entraîne par ailleurs la nullité des déviations ε_i et des invariants δ_i pour $i \geqslant 3$. Il n'est pas exclu que l'on ait pourtant des égalités $\delta_{2p+1} = \varepsilon_{2p+1}$ et $\delta_{2p+2} = \varepsilon_{2p+2}$, sans isomorphisme, dans des cas non dégénérés.

De manière générale, considérons une K-algèbre simpliciale augmentée R d'idéal d'augmentation connexe I. On dénote par J le sous-espace produit $H[I].H[I]$ de $H[I]$, les puissances divisées n'intervenant pas car nous allons considérer des degrés impairs. Soit $\overline{K}$ une autre copie de K, opérant sur $H[I]$ grâce à l'homomorphisme identité et opérant sur K grâce à l'homomorphisme de Frobenius. On peut alors construire un homomorphisme utile π

$$K \otimes_{\bar{K}} H_3 [I]/J_3 \to H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} .$$

Pour cela on considère un homomorphisme surjectif σ: $\tilde{R} \to R$, la K-algèbre simpliciale augmentée $\tilde{R}$ étant supposée acyclique. Un élément x du quotient H_3/J_3 est représenté par un élément de H_3, donc par un 3-cycle de I ou encore par une 3-chaîne de $\tilde{I}$ notée ξ. La p-ème puissance divisée du 2-bord $d\xi$ de $\tilde{I}$ est un $2p$-cycle de $\tilde{I}$, donc un $2p$-bord de $\tilde{I}$

$$\gamma^p (d\, \xi) = d\eta .$$

Il s'agit là d'un élément du noyau de σ. Par conséquent η représente un $2p+1$-cycle de I, donc un élément de H_{2p+1} ou encore un élément y du quotient H_{2p+1}/J_{2p+1}. Après les vérifications d'usage, on pose la définition $\pi(1 \otimes x) = y$. L'homomorphisme π étant défini, on n'oublie pas l'homomorphisme η_{2p+1}

$$H_{2p+1} [I]/J_{2p+1} \to H_{2p+1} [I/I^2]$$

défini lui aussi en toute généralité.

L'homomorphisme π est nul, lorsque le carré I^2 est nul. Par conséquent l'image de π est contenue dans le noyau de η_{2p+1} dans tous les cas. Parfois on obtient même une égalité. La théorie du produit symétrique montre que c'est bien le cas, lorsque la K-algèbre simpliciale augmentée R est égale à K-algèbre symétrique $S(L)$ d'un K-module simplicial connexe L. Il s'agira aussi d'une égalité dans le cas qui nous intéresse ici.

La K-algèbre simpliciale augmentée R est à nouveau celle donnant lieu au complexe cotangent. On sait surjectifs les homomorphismes canoniques de $H_k [I]$ dans $H_k [I/I^2]$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2p+1$. On a donc des homomorphismes surjectifs de H_{2p+1} $[S^r (I)]$ dans H_{2p+1} $[S^r (I/I^2)]$ pour tout r. En utilisant le théorème de convergence et une induction sur r décroissant, on démontre alors que les homomorphismes canoniques de H_{2p+1} $[S^r (I)]$ dans $H_{2p+1}[I^r]$ sont eux aussi surjectifs. On a donc la situation suivante. L'injection canonique du K-module simplicial I dans la K-algèbre simpliciale R se prolonge en un homomorphisme de la K-algèbre simpliciale $\hat{R}$, égale à la K-algèbre simpliciale $S(I)$, dans la K-algèbre simpliciale R, le tout donnant lieu à des épimorphismes

$$H_{2p+1} [\hat{I}^r] \to H_{2p+1} [I^r]$$

en particulier pour r égal à 2. Grâce à cet épimorphisme, de l'égalité de l'image de $\hat{\pi}$ et du noyau de $\hat{\eta}_{2p+1}$, mentionnée précédemment, découle l'égalité de l'image de π et du noyau de η_{2p+1}. En particulier η_{2p+1} est un isomorphisme si et seulement si π est un homomorphisme nul.

SITUATION GÉNÉRIQUE

Il faut considérer le K-module $H_3\,[I]/J_3$, autrement dit le K-module quotient

$$\mathrm{Tor}_3^A(K, K)/\mathrm{Tor}_2^A(K, K)\,.\;\mathrm{Tor}_1^A(K, K)\,.$$

Il s'agit là du quotient H_2/H_1. H_1 en homologie à la Koszul et un élément t du quotient de Tor_3 par Tor_2. Tor_1 est donc représentable par un élément g facile à expliciter à l'aide d'un système minimal de générateurs $m_1, m_2, \ldots, m_n$ de l'idéal maximal M de l'anneau local A. Ce représentant g a la forme

$$\Sigma \mu_{ij}\, dm_i \,\Lambda\, dm_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

avec la condition usuelle de cycle pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma \mu_{ij}\, m_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant μ_{ii} égal à 0 et μ_{ji} égal à $-\mu_{ij}$. Cela étant, avec un anneau B, il est naturel de considérer la B-algèbre Bn engendrée par les $n(n+1)/2$ générateurs

$$x_i \text{ avec } 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{et} \quad y_{jk} \text{ avec } 1 \leqslant j < k \leqslant n$$

et soumise aux n relations pour $1 \leqslant i \leqslant n$

$$\Sigma\, y_{ij}\, x_j = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant n$$

en posant y_{ii} égal à 0 et y_{ji} égal à $-y_{ij}$. Mais alors l'élément gn

$$\Sigma y_{ij}\, dx_i \,\Lambda\, dx_j \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

représente un élément important tn du quotient

$$\mathrm{Tor}_3^{Bn}(B, B)/\mathrm{Tor}_2^{Bn}(B, B)\,.\,\mathrm{Tor}_1^{Bn}(B, B)\,.$$

L'homomorphisme utilisé de Bn dans B est l'unique homomorphisme de B-algèbres qui envoie les générateurs x_i et y_{jk} sur 0.

Les B-algèbres Bn et $Zn \otimes_Z B$ sont isomorphes. Considérons une résolution simpliciale $Pn\,(Z)$ de la Zn-algèbre Z. Comme le Z-module Zn est libre, le produit tensoriel $Pn(Z) \otimes_Z B$ est une résolution simpliciale $Pn(B)$ de la Bn-algèbre B. Considérons encore les produits tensoriels importants

$$Rn(Z) = Pn(Z) \otimes_{Zn} Z \quad \text{et} \quad Rn(B) = Pn(B) \otimes_{Bn} B \,.$$

Les B-algèbres simpliciales $Rn(Z) \otimes_Z B$ et $Rn(B)$ sont alors isomorphes de manière élémentaire.

Considérons maintenant l'homomorphisme de l'anneau Zn dans l'anneau A qui envoie les générateurs x_i sur les éléments m_i et les générateurs y_{jk} sur les éléments μ_{jk}. Par nature, cet homomorphisme est appelé à varier. Au niveau des quotients de Tor_3 par $\mathrm{Tor}_2 . \mathrm{Tor}_1$, l'homomorphisme correspondant envoie l'élément générique tn sur l'élément quelconque t donné initialement. L'homomorphisme de Zn dans A donne un homomorphisme de $Rn(Z)$ dans R, donc un homomorphisme de $Rn(K)$ dans R, par produit tensoriel.

En résumé, on a la K-algèbre simpliciale R qui donne lieu au complexe cotangent de la A-algèbre K, avec l'homomorphisme π correspondant, et la K-algèbre simpliciale Rn qui donne lieu au complexe cotangent de la Kn-algèbre K, avec l'homomorphisme πn correspondant. De plus il existe un homomorphisme de Rn dans R plaçant finalement tn au-dessus de t et πn au-dessus de π. En particulier l'homomorphisme π est nul en entier, si l'homomorphisme πn est nul sur l'élément générique. Il reste à préciser quel est l'élément $\pi n(tn)$. On peut localiser Kn sans rien changer, si on le désire. Enfin dénotons par Mn le noyau de l'homomorphisme de Kn sur K. L'idéal Mn a $n(n+1)/2$ générateurs, alors que l'idéal M a n générateurs.

Conclusion

Considérons une résolution libre et multiplicative $\widetilde{Fn}$ de la Kn-algèbre K et dénotons par Fn le produit tensoriel $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} K$ qui permet le calcul de $\mathrm{Tor}^{Kn}(K, K)$. Dans la définition de l'homomorphisme πn, on peut remplacer les K-algèbres simpliciales Rn et $\widetilde{Rn}$ par les K-algèbres différentielles Fn et $\widetilde{Fn}$. L'élément gn appartient alors à $\widetilde{Fn} \otimes_{Kn} Mn$ et représente un élément de l'espace vectoriel

$$\mathrm{Tor}_2^{Kn}(K, Mn) \cong \mathrm{Tor}_3^{Kn}(K, K) \,.$$

Il faut alors considérer hn, la p-ème puissance divisée de gn, qui est l'élément suivant de $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$, avec le degré $2p$,

$$\Sigma y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} dx_{i_1} \Lambda\, dx_{i_2} \Lambda \ldots \Lambda dx_{i_{2p-1}} \Lambda\, dx_{i_{2p}}$$

avec la condition $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{2p-1} < i_{2p} \leqslant n$ et avec la définition classique

$$y_{i_1 i_2 \ldots i_{2p-1} i_{2p}} = \Sigma \text{ sign } \sigma\, y_{\sigma_1 \sigma_2} \cdot \ldots \cdot y_{\sigma_{2p-1} \sigma_{2p}}$$

où la permutation σ des $2p$ éléments i_j est soumise aux restrictions suivantes

$$\sigma_1 < \sigma_3 < \ldots < \sigma_{2p-1}\,,\ \sigma_1 < \sigma_2\,, \ldots, \sigma_{2p-1} < \sigma_{2p}\,.$$

Mais alors l'élément $\pi n\,(tn)$ est nul si et seulement s'il existe une famille d'éléments α_j et β_j dans $\tilde{F}n$ avec les propriétés simples suivantes. En premier lieu, les éléments α_j et β_j sont tous de degrés strictement positifs. En deuxième lieu, les bords $d\alpha_j$ et $d\beta_j$ sont tous des éléments de $\tilde{F}n \otimes_{Kn} Mn$. En troisième lieu, l'élément hn est égal à la somme des bords $d\,(\alpha_j . \beta_j)$.

Lorsque l'idéal M est engendré par $2p$-1 éléments, on peut utiliser Kn avec n égal à $2p$-1. Mais alors hn est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

Lorsque l'idéal M a sa p-ème puissance nulle, on peut remplacer Kn par le quotient $Kn/(Mn)^p$. Mais alors hn modifié est nul de manière élémentaire. Par conséquent π est nul et on obtient un isomorphisme η_{2p+1} de manière naturelle.

La plus petite algèbre Kn qui risque d'être intéressante est donc celle avec p égal à 2 et n égal à 4. Un long calcul démontre en fait que l'élément $\pi n\,(tn)$ n'est pas nul. Par conséquent, il existe un anneau local de caractéristique 2, dont l'idéal maximal a 10 générateurs et pour lequel l'épimorphisme η_5 n'est pas un isomorphisme, autrement dit pour lequel ε_5 est strictement supérieur à δ_5. A vrai dire, il existe des anneaux beaucoup plus petits avec cette inégalité, par exemple certains anneaux finis dont les idéaux maximaux ont exactement 4 générateurs.

BIBLIOGRAPHIE

[1] André, M. Hopf algebras with divided powers. *J. Algebra 18* (1971), 19-50.

[2] —— *Homologie des algèbres commutatives*. Springer, 1974.

[3] Cartan, H. *Séminaire 1954/1955*. Benjamin, 1967.

[4] DOLD, A. et R. THOM. Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte. *Annals Math. 67* (1958), 239-280.
[5] NICOLLERAT, M.-A. Homologie des produits symétriques. *A paraître.*
[6] QUILLEN, D. On the homology of commutative rings. *Proc. Sym. Pure Math. 17* (1970), 65-87.

(Reçu le 6 mai 1977)

Michel André

Département de Mathématiques
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
61, Avenue de Cour
1007 Lausanne