Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Band: 24 (1978)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS

Kapitel: §2. Groupes de nœuds

Autor: Hausmann, J. C. / Kervaire, M.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49694

(On notera que les relations $ux_iu^{-1} = vx_iv^{-1}$, si u et $v \in Z$ représentent le même élément de H, sont évidemment conséquences de $R_{s+1}, \ldots, R_r$ qui définissent H.) Il en résulte que π admet la présentation $\pi = < x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n : R_1, \ldots, R_r >$, où $R_i = R^*_{i,e}$ pour $i = 1, \ldots, s$.

§ 2. Groupes de nœuds

Il est maintenant facile de caractériser le sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud.

On note C le groupe cyclique infini de générateur z.

Théorème 2. *Un groupe* G *est sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud,* i.e. *d'un groupe satisfaisant aux conditions* (1), (2), (3) *de l'introduction, si et seulement si* G *admet une présentation C-dynamique finie avec automorphisme induit* $\sigma : G \to G$ *tel que*

(I) G *est engendré par les éléments de la forme* $x \,.\, \sigma(x^{-1}), x \in G$;

(II) $H_2(G)$ *est un* $\mathbf{Z}\,C$*-module parfait,* i.e. $\sigma_* - 1 : H_2G \to H_2G$ *est surjective.*

Note. La condition (II) s'exprime homologiquement par $H_0(C, H_2G) = 0$. C'est sous cette forme que nous l'utiliserons.

Preuve. Soient π un groupe de nœud et $z \in \pi$ un élément dont la clôture normale est π tout entier. On a $\pi = G \tilde{\times} C$, où $G = [\pi, \pi]$ et C est infini cyclique engendré par z.

Comme π est de présentation finie, il résulte du théorème 1 que G possède une présentation C-dynamique finie avec automorphisme $\sigma : G \to G$ donné par $\sigma(x) = zxz^{-1}$.

On va voir que σ satisfait aux conditions (I) et (II) du théorème 2.

(I) Si $g \in G$, g est un produit de conjugués de z et z^{-1}, i.e. $g = \Pi_i x_i z^{\varepsilon_i} x_i^{-1}$, $x_i \in \pi$, avec $\Sigma_i \, \varepsilon_i = 0$. Comme $x_i z x_i^{-1} = x_i z^a z z^{-a} x_i^{-1}$, on peut supposer $x_i \in G$ pour tout i. Or, avec $x \in G$, on a

$$xzx^{-1} = xzx^{-1}z^{-1}z = x \,.\, \sigma(x^{-1}) \,.\, z \,.$$

Il en résulte facilement que tout élément de G s'écrit comme produit d'éléments de la forme $x \,.\, \sigma(x^{-1})$ et de leurs inverses.

(II) La suite spectrale de Hochschild-Serre pour l'extension $1 \to G \to \pi \to C \to 1$, où $H_i(C, M) = 0$ pour $i \geqq 2$ et pour tout $\mathbf{Z}\,C$-module M, fournit la suite exacte

$$0 \to H_0(C, H_2 G) \to H_2(\pi) \to H_1(C, H_1 G) \to 0\,,$$

où $H_2 G$ est un $\mathbf{Z}\,C$-module par l'action de C sur G définie plus haut. (Cette action dépend du choix de z mais on sait que l'action induite sur $H_*(G)$ ne dépend que de l'extension.)

Comme π est groupe de nœud, on a $H_2(\pi) = 0$, et ceci entraîne $H_0\big(C, H_2(G)\big) = 0$, ce qui équivaut à $H_2 G$ parfait.

Réciproquement, si G possède une présentation C-dynamique finie $< x_{1,a}, \ldots, x_{m,a}: R_{1,b}, \ldots, R_{n,b} >$ satisfaisant aux conditions (I) et (II) du théorème 2, on obtient comme au § 1 une présentation finie de $\pi = G \tilde{\times} C$ de la forme

$$\pi = < x_1, \ldots, x_m, z : R_1, \ldots, R_n >\,,$$

où $x_1, \ldots, x_m$ représentent des éléments de G, z engendre C et l'automorphisme $\sigma: G \to G$ induit par la présentation dynamique est donné par $\sigma(x) = zxz^{-1}$.

Comme G est engendré par les éléments de la forme $x\,.\,\sigma(x^{-1}) = xzx^{-1}z^{-1}$, il en résulte que π est la clôture normale de z, et aussi $G \subset [\pi, \pi]$.

Comme π s'envoie sur C avec noyau G, on a $G = [\pi, \pi]$ et $H_1(\pi) = \mathbf{Z}$. Il reste à vérifier que $H_2(\pi) = 0$.

La suite spectrale de l'extension $1 \to G \to \pi \to C \to 1$ fournit encore la suite exacte

$$0 \to H_0(C, H_2 G) \to H_2(\pi) \to H_1\big(C, H_1(G)\big) \to 0\,.$$

Mais $H_1\big(C, H_1(G)\big) = 0$ par un théorème de W. Dwyer [*D*], et la condition (II): $H_0\big(C, H_2(G)\big) = 0$ entraîne $H_2(\pi) = 0$.

Le groupe π satisfait donc aux trois conditions (1), (2), (3) de l'introduction.

Note. Le théorème de Dwyer est beaucoup plus général que le cas particulier considéré ci-dessus, et sa démonstration utilise d'ailleurs la démonstration directe de ce cas particulier.

Si M désigne le $\mathbf{Z}\,C$-module $H_1(G)$, la condition (I) sur G implique que M est un $\mathbf{Z}\,C$-module parfait, i.e. $\sigma - 1: M \to M$ est surjective. D'autre part M est de génération finie sur $\mathbf{Z}\,C$ (finitude de la présentation dynamique), et comme $\mathbf{Z}\,C$ est un anneau noethérien, il en résulte que $\sigma - 1 : M \to M$ est aussi injective. Or, la résolution $0 \to \mathbf{Z}\,C \xrightarrow{d} \mathbf{Z}\,C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$, où $d(1) = z - 1$ montre que $H_1(C, M) = \operatorname{Ker}\{\sigma - 1 : M \to M\} = 0$.

L'assertion résulte aussi du fait que C est un groupe à dualité. (Cf. [B.-E.].)

§ 3. Exemples

Quels groupes abéliens peuvent être sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud ?

Dans ce paragraphe on dira qu'un automorphisme $\sigma : G \to G$ d'un groupe abélien G est *admissible* si $\sigma - 1 : G \to G$ et $\sigma - 1 : H_2G \to H_2G$ sont surjectifs.

Rappelons que H_2G et la deuxième puissance extérieure $\Lambda^2 G$ sont fonctoriellement isomorphes. En effet, si l'on définit H_2G par la formule $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$, où $1 \to R \to F \to G \to 1$ est une présentation de G, alors $[F, F] \subset R$ pour G abélien et donc $H_2G = [F, F]/[R, F]$. On définit alors un isomorphisme $f : \Lambda^2 G \to H_2G$ par la formule $f(g \wedge g') = [x, x'] \bmod [R, F]$, où $x, x' \in F$ représentent $g, g' \in G$ respectivement.

La condition sur H_2G est donc équivalente (pour G abélien) à la surjectivité de $\Lambda^2\sigma - 1 : \Lambda^2 G \to \Lambda^2 G$.

Considérons d'abord les groupes abéliens de type fini.

Notations. Si G est abélien de type fini, on notera T son sous-groupe de torsion et $F = G/T$. On a $T = \oplus_p T_p$, p premier, où T_p est un p-groupe, et on notera

r_G = rang de F,

$r_G(p^n)$ = nombre de facteurs isomorphes à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ dans T_p.

Théorème 3. *Un groupe abélien de type fini G se présente comme sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud si et seulement si*

(1) $r_G \neq 1, 2$,

(2) $r_G(2^n) \neq 1, 2$ *pour tout* n, *et*

(3) $r_G(3^n)$ *n'est égal à* 1 *que pour une valeur de* n *au plus.*

Exemples. $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ ne sont pas des sous-groupes dérivés d'un groupe de nœud. Par contre J. Levine démontre que ces groupes