Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 24 (1978)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOUS-GROUPES DÉRIVÉS DES GROUPES DE NŒUDS
Autor: Hausmann, J. C. / Kervaire, M.
Kapitel: §3. Exemples
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-49694

dynamique), et comme $\mathbf{Z}\,C$ est un anneau noethérien, il en résulte que $\sigma - 1 : M \to M$ est aussi injective. Or, la résolution $0 \to \mathbf{Z}\,C \xrightarrow{d} \mathbf{Z}\,C \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{Z} \to 0$, où $d(1) = z - 1$ montre que $H_1(C, M) = \mathrm{Ker}\{\sigma - 1 : M \to M\} = 0$.

L'assertion résulte aussi du fait que C est un groupe à dualité. (Cf. [B.-E.].)

§ 3. Exemples

Quels groupes abéliens peuvent être sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud ?

Dans ce paragraphe on dira qu'un automorphisme $\sigma : G \to G$ d'un groupe abélien G est *admissible* si $\sigma - 1 : G \to G$ et $\sigma - 1 : H_2G \to H_2G$ sont surjectifs.

Rappelons que H_2G et la deuxième puissance extérieure $\Lambda^2 G$ sont fonctoriellement isomorphes. En effet, si l'on définit H_2G par la formule $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$, où $1 \to R \to F \to G \to 1$ est une présentation de G, alors $[F, F] \subset R$ pour G abélien et donc $H_2G = [F, F]/[R, F]$. On définit alors un isomorphisme $f : \Lambda^2 G \to H_2G$ par la formule $f(g \wedge g') = [x, x']$ mod $[R, F]$, où $x, x' \in F$ représentent $g, g' \in G$ respectivement.

La condition sur H_2G est donc équivalente (pour G abélien) à la surjectivité de $\Lambda^2\sigma - 1 : \Lambda^2 G \to \Lambda^2 G$.

Considérons d'abord les groupes abéliens de type fini.

Notations. Si G est abélien de type fini, on notera T son sous-groupe de torsion et $F = G/T$. On a $T = \oplus_p T_p$, p premier, où T_p est un p-groupe, et on notera

r_G = rang de F,

$r_G(p^n)$ = nombre de facteurs isomorphes à $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ dans T_p.

Théorème 3. *Un groupe abélien de type fini G se présente comme sous-groupe dérivé d'un groupe de nœud si et seulement si*

(1) $r_G \neq 1, 2$,

(2) $r_G(2^n) \neq 1, 2$ *pour tout* n, *et*

(3) $r_G(3^n)$ *n'est égal à* 1 *que pour une valeur de* n *au plus.*

Exemples. $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$ ne sont pas des sous-groupes dérivés d'un groupe de nœud. Par contre J. Levine démontre que ces groupes

apparaissent comme $G/[G, G]$ avec G = groupe dérivé d'un groupe de nœud. (Voir [L], et aussi [$L2$] pour d'autres résultats reliés au théorème 3.)

Il s'agit de démontrer qu'un groupe abélien de type fini possède un automorphisme admissible si et seulement si il satisfait aux 3 conditions du théorème.

On peut construire des automorphismes admissibles comme suit. Soient $f = t^m - a_m t^{m-1} - \ldots - a_2 t - a_1$ un polynôme à coefficients entiers et σ_f l'endomorphisme de $\mathbf{Z}^m$ donné par

$$\sigma_f e_i = e_{i+1} \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, m-1 ,$$
$$\sigma_f e_m = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_m e_m ,$$

où $e_1, \ldots, e_m$ est la base canonique de $\mathbf{Z}^m$.

f est le polynôme caractéristique de σ_f qui est donc un automorphisme si et seulement si $f(0) = a_1 = \pm 1$.

Dans ce cas, soit M_f le $\mathbf{Z}\,C$-module $\mathbf{Z}^m$ muni de l'action de C définie par l'automorphisme σ_f. On a $M_f = \mathbf{Z}\,C/(f(z))$.

Il est clair que $\sigma_f - 1$ est surjective (donc un automorphisme) si et seulement si $f(1) = \pm 1$.

On notera f^* le polynôme (unitaire) *réciproque* de f, i.e.

$$f^*(t) = f(0)\, t^{\deg f} f(t^{-1}) .$$

LEMME 3.1. *Soient f et g deux polynômes comme ci-dessus*, i.e. $f, g \in \mathbf{Z}[t]$, *et* $f(0), g(0), f(1), g(1) = \pm 1$. *Supposons qu'il existe des polynômes $U, V \in \mathbf{Z}[t]$ tels que $Uf^* + Vg = 1$.*

Alors, $M_f \otimes M_g$ muni de l'automorphisme $\sigma_f \otimes \sigma_g$ est parfait.

En particulier, si $f = g$ on conclut que $\Lambda^2 M_f$, quotient du $\mathbf{Z}\,C$-module parfait $M_f \otimes M_f$, est lui-même parfait.

Preuve du lemme. Le polynôme caractéristique de $\sigma_f \otimes \sigma_g$ est $F = \Pi_{i,j}(t - \alpha_i \beta_j)$, où $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ resp. $\beta_1, \ldots, \beta_n$ sont les racines de f, resp. g. Il s'agit de démontrer que $F(1) = \pm 1$. Soit K le corps des racines de $f \cdot g$. Les éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n$ sont des unités de l'anneau A des entiers de K. Il suffit de démontrer que $F(1)$ est également une unité, i.e. $F(1) \notin P$ pour tout idéal premier de A.

Or, $\Pi_{i,j}(1 - \alpha_i \beta_j) = \pm \Pi_{i,j}(\alpha_i^{-1} - \beta_j)$. Les éléments $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_m^{-1} \in A$ sont les racines de f^* dans K. Dire que $\Pi_{i,j}(\alpha_i^{-1} - \beta_j)$ appartient à P c'est dire que f^* et g ont une racine commune dans le corps résiduel A/P, extension de $\mathbf{F}_p$, où $\mathbf{Z}_p = P \cap \mathbf{Z}$. Ceci contredit l'équation $Uf^* + Vg = 1$ lue mod p.

Cet argument montre que si l'on a seulement $Uf^* + Vg = c \neq 0$, alors $(M_f/p^m M_f) \otimes (M_g/p^n M_g)$ est parfait pourvu que p ne divise pas c.

On considère les 3 polynômes

$$f = t^3 - t + 1$$
$$g = t^4 - 2t^2 + t + 1$$
$$h = t^5 - t^2 + 1$$

et les modules correspondants M_f, M_g, M_h de dimensions 3, 4, 5 respectivement. Ces modules sont parfaits. On les notera M_3, M_4, M_5. De plus, f, g, h satisfont à l'hypothèse du lemme. D'abord tout $f_k = t^{2k+1} - t^k + 1$ satisfait à l'identité

$$(1+t+\ldots+t^k) \cdot f_k^* - (t+t^2+\ldots+t^k) \cdot f_k = 1,$$

or $f = f_1$, $h = f_2$. On vérifie ensuite l'identité

$$(2-2t-t^2+t^3) \cdot g^* - (1-3t+t^3) \cdot g = 1$$

et celles-ci:

$$(2-t^2) \cdot f^* + (-1+t) \cdot g = 1,$$
$$(-1+3t-t^2+t^3-2t^4) \cdot f^* + (2-3t+2t^2) \cdot h = 1,$$
$$(t-2t^2-t^3-2t^4) \cdot g^* + (1-t+3t^2+2t^3) \cdot h = 1$$

qui montrent que tous les produits tensoriels $M_i \otimes M_j$, $i, j = 3, 4, 5$ et les puissances extérieures $\Lambda^2 M_i$, $i = 3, 4, 5$ sont des $\mathbf{Z}\,C$-modules parfaits.

Nous avons encore besoin du module $M_2 = \mathbf{Z}\,e_1 + \mathbf{Z}\,e_2$ muni de l'automorphisme σ_ϕ défini par $\sigma_\phi e_1 = e_2$, $\sigma_\phi e_2 = e_1 - e_2$ de polynôme caractéristique $\phi = t^2 + t - 1 \in \mathbf{Z}[t]$.

Le module M_2 est parfait et on a $\Lambda^2 M_2 = \mathbf{Z}$ avec l'automorphisme $\Lambda^2 \sigma_\phi = -1$. Donc, σ_ϕ est admissible pour $M_2/3^n M_2$ pour tout entier positif n.

Soit alors $G = F \oplus T$ un groupe abélien satisfaisant aux hypothèses du théorème 3. L'entier $r_G = \text{rang } F$, s'il est non-nul, est $\geqq 3$ et peut donc s'écrire sous la forme $r_G = 3m_3 + 4m_4 + 5m_5$ avec $m_3, m_4, m_5 \geqq 0$. On munit F de la structure de $\mathbf{Z}\,C$-module définie par $m_3 M_3 + m_4 M_4 + m_5 M_5$. De même pour $T_2 = \oplus_n r_G(2^n) \cdot (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$, on a pour tout n, $r_G(2^n) = 0$ ou $\geqq 3$. On peut donc choisir une décomposition $r_G(2^n) = 3a + 4b + 5c$ avec a, b, c entiers $\geqq 0$. On imprime sur $r_G(2^n) \cdot (\mathbf{Z}/2^n\mathbf{Z})$ la structure de $\mathbf{Z}\,C$-module définie par $a(M_3/2^n M_3) + b(M_4/2^n M_4) + c(M_5/2^n M_5)$.

Pour T_3 on procède de même avec les facteurs $r_G(3^n) \cdot (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$ lorsque $r_G(3^n) \geqq 3$. Si $r_G(3^n) = 2$, on prend $M_2/3^nM_2$. Enfin, si $r_G(3^n) = 1$, ce qui ne peut arriver que pour une seule valeur de n au plus, on définit $\sigma: \mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z}$ par $\sigma(x) = -x$.

Finalement, pour T_p, $p \geqq 5$, on utilise le lemme suivant.

LEMME 3.2. *Pour tout nombre premier* $p \geqq 5$, *il existe un entier* $a_p \not\equiv 0, 1, -1 \bmod p$ *tel que* $f(a_p) \not\equiv 0$, $g(a_p) \not\equiv 0$, *et* $h(a_p) \not\equiv 0 \bmod p$.

On définit $\sigma_p: T_p \to T_p$ par $\sigma_p(x) = a_p^{-1} \cdot x \bmod p^e$, où p^e est l'exposant de T_p. On voit que T_p et $\Lambda^2 T_p$ sont parfaits.

Preuve du lemme. Le polynôme $f \cdot g \cdot h$ de degré 12 a au plus 12 racines dans $\mathbf{F}_p$. Si $p \geqq 17$, il existe donc $a_p \not\equiv 0, 1, -1$ et également différend mod p des racines éventuelles de $f \cdot g \cdot h$ dans $\mathbf{F}_p$. Pour $p = 5$, on prend $a_5 = 2$. Pour $p = 7$, 11 ou 13 le nombre $a_p = 3$ convient.

Il reste à vérifier que l'automorphisme $\sigma: G \to G$ somme directe des automorphismes construits ci-dessus, est admissible.

D'abord G est somme directe de modules parfaits, donc G est parfait.

$\Lambda^2 G$ est somme directe de $\mathbf{Z}$ C-modules qui sont tous des quotients de modules de l'un des types suivants, où $i, j = 3, 4$ ou 5:

(i) $M_i \otimes M_j$,

(ii) $M_i \otimes (M_2/3^nM_2)$,

(iii) $(M_2/3^mM_2) \otimes (M_2/3^nM_2)$,

(iv) $M_i \otimes (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$,

(v) $(M_2/3^mM_2) \otimes (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$,

(vi) $\Lambda^2 T_p$ pour $p \geqq 5$, et

(vii) $M_i \otimes T_p$ pour $p \geqq 5$.

(Le type $(\mathbf{Z}/3^m\mathbf{Z}) \otimes (\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z})$ n'apparaît *pas* en vertu de la condition (3) du théorème.)

Dans cette liste, les produits tensoriels $M_i \otimes M_j$ sont parfaits en vertu du lemme 3.1. Ceux du type (ii) sont parfaits car f^*, g^*, h^* sont premiers à $\phi \bmod 3^n$ comme on le vérifie facilement. Pour ceux du type (iii), on utilise l'identité

$$(1+t)\phi^* + (1-t)\phi = -2 \not\equiv 0 \bmod 3 .$$

Pour les types (iv) et (v), on remarque que f^*, g^*, h^* et ϕ^* prennent en -1 (la valeur propre de σ sur $\mathbf{Z}/3^n\mathbf{Z}$) des valeurs premières à 3.

$\Lambda^2 T_p$ est parfait car $\Lambda^2 \sigma_p$ est l'homothétie de rapport $a_p^{-2} \not\equiv 0, 1 \bmod p$. Enfin les modules $M_i \otimes T_p$ sont parfaits car $f(a_p)$, $g(a_p)$ et $h(a_p)$ sont inversibles mod p^l par le lemme 3.2.

Le module $\Lambda^2 G$ est donc parfait.

Réciproquement, les conditions du théorème 3 sont nécessaires pour que G possède un automorphisme admissible.

On observe d'abord que si G est un $\mathbf{Z}\,C$-module satisfaisant $H_0(C, H_1G) = 0$, $H_0(C, H_2G) = 0$, il en est de même de tout module quotient. La formule $H_2G = R \cap [F, F]/[R, F]$, où $1 \to R \to F \to G \to 1$ est une présentation de G, montre immédiatement qu'une surjection $G \to G'$ de groupes abéliens induit une surjection $H_2G \to H_2G'$. Cela résulte évidemment aussi de la suite spectrale de Hochschild-Serre. Ensuite, comme on l'a déjà observé, tout module quotient d'un module parfait est parfait.

Si G est un $\mathbf{Z}\,C$-module parfait et de *type fini*, alors tout sous $\mathbf{Z}\,C$-module G_0 de G est également parfait. (Regarder la suite croissante de sous-modules $G_i = \{ x \in G \mid (\sigma - 1)^i x \in G_0 \}$.) Il en résulte que si G est un $\mathbf{Z}\,C$-module de type fini tel que $H_0(C, H_1G) = 0$ et $H_0(C, H_2G) = 0$ et si $G_0 \subset G$ est un sous $\mathbf{Z}\,C$-module de G et un $\mathbf{Z}$-facteur direct, alors $H_0(C, H_1G_0) = 0$ et $H_0(C, H_2G_0) = 0$. Il suffit de remarquer que H_2G_0 est sous $\mathbf{Z}\,C$-module de H_2G qui est de type fini.

Soit maintenant G un groupe abélien de type fini muni d'une structure de $\mathbf{Z}\,C$-module telle que G et H_2G soient parfaits.

Comme le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion $T \subset G$ est un sous $\mathbf{Z}\,C$-module, $F = G/T$ possède un automorphisme admissible. On a donc rang $F \neq 1, 2$. (Car $H_2(\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$.) C'est la condition (1) du théorème 3.

Pour obtenir les conditions (2) et (3), on observe d'abord que $H_0(C, T_p) = 0$ et $H_0(C, H_2T_p) = 0$ pour tout p. De même, avec $V = T_p/pT_p$, on a en vertu des remarques précédentes $H_0(C, V) = 0$ et $H_0(C, H_2V) = 0$.

D'autre part l'action de C sur V se factorise par l'action d'un groupe cyclique fini C_m d'ordre m. Soit $m = q \,.\, s$ avec $q = p^f$ et s premier à p. L'action d'un p-groupe sur V étant unipotente, V ne peut être un $\mathbf{Z}\,C_m$-module parfait que si $s > 1$ et $H_0(C_s, V) = 0$, où C_s est le sous-groupe d'ordre s de C_m. Comme s est premier à p, V est un $\mathbf{F}_pC_s$-module semi-simple. Une famille de sous-modules de V est fournie par les images dans V des noyaux $\mathrm{Ker}\,\{ p^n : T_p \to T_p \}$. Soient $V_0 = 0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots$ ces images. On notera que $\dim V_n/V_{n-1} = r_G(p^n)$. Comme V est $\mathbf{F}_pC_s$-module semi-simple, il en résulte que V est somme directe de sous $\mathbf{F}_pC_s$-modules $U_n \cong V_n/V_{n-1}$ avec $\dim U_n = r_G(p^n)$. On a donc $H_0(C_s, U_n) = 0$ et $H_0(C_s, H_2U_n) = 0$ pour tout n.

Pour $p = 2$ cela fournit immédiatement la condition (2).

Pour $p = 3$, on observe que si $\dim U_m = \dim U_n = 1$ pour $m \neq n$, le générateur $\tau = \sigma^q$ de C_s opère nécessairement par $\tau(x) = -x$, et le

produit tensoriel $U_m \otimes U_n$ est sous-module trivial de H_2V ce qui contredit la condition $H_0(C_s, H_2V) = 0$.

Dans le cas où G n'est pas de type fini nous sommes loin de pouvoir faire une analyse complète et nous nous bornons à quelques remarques.

D'après un théorème de D. W. Sumners (Théorème 2.1 de [S]), tout $\mathbf{Z}\,C$-module parfait de génération finie G possède un sous-module G_0 d'indice fini de la forme

$$G_0 \cong \mathbf{Z}C/(f_1) + \ldots + \mathbf{Z}C/(f_r)\,.$$

Comme G_0 est évidemment parfait, on doit avoir $f_i(1) = \pm 1$ pour tout $i = 1, \ldots, r$ et G_0 est sans $\mathbf{Z}$-torsion.

Le $\mathbf{Z}\,C$-module G_0 est lui-même sous-groupe dérivé de groupe de nœud.

En effet, si H_2G est un module parfait, il en est de même de $H_2(G/T)$, car le sous-module de $\mathbf{Z}$-torsion T d'un $\mathbf{Z}\,C$-module parfait de type fini est fini et donc $\mathbf{Z}$-facteur direct. L'inclusion $G_0 \to G/T$ induit une injection $H_2G_0 \to H_2(G/T)$. Donc H_2G_0 est parfait.

Enfin, il est facile de vérifier que si G admet une présentation H-dynamique finie est si G_0 est un sous-groupe d'indice fini de G invariant par l'action de H, alors G_0 admet aussi une présentation H-dynamique finie. (On se ramène au cas classique en considérant $G_0 \tilde{\times} H \to G \tilde{\times} H$.)

PROPOSITION. *Le* $\mathbf{Z}\,C$*-module*

$$G_0 \cong \mathbf{Z}C/(f_1) + \ldots + \mathbf{Z}C/(f_r)$$

admet (comme groupe abélien) une présentation C-dynamique finie induisant l'action donnée de C *sur* G_0 *si et seulement si le produit* $f_1 \ldots f_r$ *a son terme dominant ou son terme constant égal à* ± 1.

(Les éléments $f_i \in \mathbf{Z}\,C$ sont supposés écrits comme polynômes de terme constant non-nul.)

Exemple. Si $f_1 = z^2 + az + b$ et $f_2 = z^3 + \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, le groupe $G_0 = \mathbf{Z}\,C/(f_1) + \mathbf{Z}C/(f_2)$ avec l'action naturelle de C admet la présentation C-dynamique suivante:

Générateurs:

$$x_m, y_m \qquad m \in \mathbf{Z}\,,$$

représentant z^m dans le premier et deuxième facteur respectivement.

Relateurs:

$$x_{m+2}x_{m+1}^{a}x_{m}^{b},\ y_{m+3}y_{m+2}^{\alpha}y_{m+1}^{\beta}y_{m}^{\gamma}$$
$$[x_m, x_{m+1}],\ [y_m, y_{m+1}],\ [y_m, y_{m+2}]$$
$$[x_{m+1}, y_m],\ [x_m, y_m],\ [x_m, y_{m+1}],\ [x_m, y_{m+2}]$$

Nous laissons au lecteur le soin de traiter le cas général. La nécessité de la condition résulte du théorème C de [B.-S.].

Compte-tenu de la classification des groupes abéliens de rang 1, ceci donne:

Le seul groupe abélien de rang 1, sans **Z**-torsion, qui se présente comme groupe dérivé d'un groupe de nœud est le groupe $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$. L'automorphisme est alors nécessairement la multiplication par 2 (ou son inverse).

En rangs $n \geqq 2$, on peut classer les modules $G_0 = \mathbf{Z}C/(f)$ admissibles, où $f = z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ pour les petites valeurs de n.

La condition que G_0 soit parfait donne

$$1 + \sum_{i=1}^{n} a_i = \varepsilon\,. \qquad (\varepsilon = \pm 1)\,. \tag{1}$$

Pour le groupe $H_0(C, H_2G_0)$ on trouve la matrice de présentation (à $n-1$ lignes et $n-1$ colonnes):

$$X_f = \begin{bmatrix} a_n & & 0 \\ a_{n-1}\ a_n & & \\ \ldots & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ a_2 \quad \ldots & & a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{n-2}\ a_{n-3} \ldots a_1\ 1 \\ a_{n-3} \ldots \quad 1 \\ \\ \ldots \\ \\ 1 \qquad\qquad 0 \end{bmatrix}$$

obtenue en substituant $z = 1$ dans une matrice de présentation de A^2G_0 sur les $\mathbf{Z}$ C-générateurs $1 \wedge z, \ldots, 1 \wedge z^{n-1}$.

La condition $H_0(C, H_2G_0) = 0$ donne

$$\text{dét } X_f = \delta\,. \qquad (\delta = \pm 1\,.) \tag{2}$$

Pour $n = 2$, on a $X_f = (a_2 - 1)$. On obtient le système

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 &= \varepsilon\,, \\ a_2 - 1 \qquad &= \delta\,. \end{aligned}$$

Seules solutions: $a_1 = -4, -2$ et $a_2 = 2$ qui donnent deux modules tous deux isomorphes à $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \oplus \mathbf{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ comme groupes abéliens.

Pour $n = 3$,

$$X_f = \begin{bmatrix} a_3 - a_1 & -1 \\ a_2 - 1 & a_3 \end{bmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que les seuls polynômes $f = z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3$ tels que

$$\begin{aligned} 1 + a_1 + a_2 + a_3 &= \varepsilon, \\ \text{dét } X_f &= \delta, \end{aligned}$$

sont ceux de la liste suivante:

$$\begin{aligned} &z^3 - 2z^2 + (1+\varepsilon)\, z + c\,(z-1)^2 \quad \text{pour tout} \quad c \in \mathbf{Z}, \\ &z^3 + \varepsilon z - 1 + cz\,(z-1) \quad \text{pour tout} \quad c \in \mathbf{Z}. \\ &z^3 - z + 1 \\ &z^3 - 6z^2 + 8z - 2 \\ &z^3 - 6z^2 + 9z - 3 \\ &z^3 - 2z^2 + 2z - 2 \\ &z^3 - 2z^2 - z + 1 \\ &z^3 - 4z^2 + 5z - 3. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

[B.-E.] Bieri, R. and B. Eckmann. Groups with homological duality generalizing Poincaré duality. *Inventiones Math. 20* (1973), pp. 103-124.

[B.-S.] Bieri, R. and R. Strebel. Almost finitely presented soluble groups. *(To appear in Comm. Math. Helv.)*

[D] Dwyer, W. Vanishing homology over nilpotent groups. *Proc. A.M.S. 49* (1975), pp. 8-12.

[K] Kervaire, M. Les nœuds de dimensions supérieures. *Bull. Soc. Math. France 93* (1965), pp. 225-271.

[L] Levine, J. Knot modules I. *Trans. AMS 229* (1977), pp. 1-50.

[L2] —— Some result in higher dimensional knot groups. *Knots, Les-Plans-sur-Bex 1977, à paraître en Springer Lecture Notes.*

[S] Sumners, D. W. Polynomial invariants and the integral homology of coverings of knots and links. *Inventiones Math. 15* (1972), pp. 78-90.

(Reçu le 5 septembre 1977)

J. C. Hausmann
M. Kervaire

Section de Mathématiques
Case postale 124
CH-1211 Genève 24