

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: I.1. Singularités des courbes planes et revêtements
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

tant qu'éléments de $K[X]$ [AC, VII, §3, n° 5, th. 2], ou encore si et seulement si leurs facteurs irréductibles (= éléments extrémaux) sont non équivalents deux à deux [A, VI, §1, n° 12, prop. 11 (DIV) et AC, VII, §3, n° 2, th. 1], ou enfin si et seulement si leur *résultant n'est pas nul* dans A (donc est inversible dans K); cette dernière affirmation est à un oubli de détail près le lemme 3 de l'appendice III de [7]. De même, les facteurs irréductibles de P sont non équivalents entre eux si et seulement si son discriminant n'est pas nul; on dit alors que P est *sans facteur multiple*.

Soient B un second anneau intègre et $\varphi: A \rightarrow B$ un homomorphisme appliquant 1 sur 1; nous désignons par la même lettre l'homomorphisme $A[X] \rightarrow B[X]$. Si $\text{Res}(\cdot, \cdot)$ et $\text{Dis}(\cdot)$ dénotent respectivement le résultant et le discriminant, il convient d'insister sur la propriété suivante, qui est très utile malgré sa banalité:

$$\begin{aligned} \varphi(\text{Res}(P, Q)) &= \text{Res}(\varphi(P), \varphi(Q)) \\ \varphi(\text{Dis}(P)) &= \text{Dis}(\varphi(P)). \end{aligned}$$

Le cas le plus fréquent ci-dessous est celui où $A = \mathcal{O}(D)$ est l'anneau des fonctions holomorphes sur un polycylindre D de \mathbb{C}^k centré à l'origine, où $B = {}_k\mathcal{O}$ et où $\varphi: f \mapsto \underline{f}$ est l'injection canonique. Précisons à ce sujet que tous les *polycylindres* du texte sont *ouverts*.

Le travail du premier auteur a été rendu possible par le Fonds national suisse de la recherche scientifique.

I. COURBES PLANES

I.1. SINGULARITÉS DES COURBES PLANES ET REVÊTEMENTS

Soit $\underline{\gamma}$ un *germe de courbe plane*. On peut toujours supposer $\underline{\gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass (quitte à opérer un changement linéaire de coordonnées). Plus précisément, il existe

- 1°) Un polycylindre D_2 dans \mathbb{C}^2 , centré à l'origine; nous noterons D_1 sa trace sur la droite $\mathbf{C} = \mathbf{C}_x$ de $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}_{xy}^2$.
- 2°) Un polynôme de Weierstrass $f \in \mathcal{O}(D_1)[y]$ de degré n , c'est-à-dire une fonction $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec

$$f(x, y) = y^n + a_1(x) y^{n-1} + \dots + a_n(x)$$

pour tout $(x, y) \in D_2$, où les a_j sont des fonctions holomorphes dans D_1 qui s'annulent à l'origine.

Le germe $\underline{\gamma}$ est alors représenté par $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid f(x, y) = 0\}$. Nous écrirons plus simplement γ si $D_2 = \mathbf{C}^2$. On peut toujours remplacer D_2 par un polycylindre plus petit; en particulier, on pourra toujours supposer que la projection canonique fournit par restriction une application π de γ_D sur D_1 . Si $n = 1$, le changement de coordonnées $(x, y) \mapsto (x, y - a(x))$ montre que γ_D est lisse à l'origine; nous supposons désormais $n \geq 2$ (on prendra garde que ceci n'exclut pas tous les germes lisses, comme le montre le cas de $f(x, y) = y^2 - x$).

PROPOSITION 1. Soit $\underline{\gamma}$ un germe donné comme ci-dessus. Alors la projection canonique de \mathbf{C}^2 sur \mathbf{C} induit (après rétrécissement éventuel de D_2) un revêtement holomorphe à n feuilles

$$\pi^*: \gamma_D^* = \gamma_D - \{(0, 0)\} \rightarrow D_1^* = D_1 - \{0\}$$

Preuve. Le discriminant $\text{Dis}(f)$ est un élément de $\mathcal{O}(D_1)$. Notons $\text{Ev}: \mathcal{O}(D_1) \rightarrow \mathbf{C}$ le morphisme d'évaluation $g \mapsto g(0)$; alors $\text{Ev}(\text{Dis}(f)) = \text{Dis}(\text{Ev}(f))$. Or $\text{Ev}(f) = y^n$ est un polynôme qui a par hypothèse ($n \geq 2$) une racine multiple et son discriminant est nul. Par suite $\text{Dis}(f)$ s'annule à l'origine.

On peut supposer que le germe à l'origine \underline{f} de f est sans facteur multiple, de sorte que $\text{Dis}(\underline{f})$ n'est pas nul. Mais $\text{Dis}(\underline{f})$ est le germe de $\text{Dis}(f)$. Par suite la fonction $\text{Dis}(f)$ n'est pas nulle, ses zéros sont isolés, et on peut supposer (après rétrécissement de D_2 au besoin) que $\text{Dis}(f)$ ne s'annule pas dans D_1^* .

Soient $a \in D_1^*$ et $\text{Ev}_a: \mathcal{O}(D_1) \rightarrow \mathbf{C}$ l'évaluation $g \mapsto g(a)$. Comme $\text{Dis}(\text{Ev}_a(f)) = \text{Ev}_a(\text{Dis}(f)) \neq 0$, le polynôme $y \mapsto f(a, y)$ n'a pas de racine double; en d'autres termes $\frac{\partial f}{\partial y}(a, y) \neq 0$ si $(a, y) \in \gamma_D^*$. Par suite la

fonction $\frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{O}(D_2)$ ne s'annule pas sur γ_D^* . Le théorème des fonctions implicites affirme dans cette situation que γ_D^* est une courbe lisse et que π^* est un isomorphisme analytique local. Ses fibres ayant toutes le même nombre n d'éléments, c'est de plus un revêtement. ■

COROLLAIRE. Les singularités des courbes planes sont isolées.

PROPOSITION 2. On suppose \underline{f} sans facteur multiple. Alors \underline{f} est *réductible* si et seulement s'il existe un polycylindre D_2 tel que \underline{f} ait un représentant $f \in \mathcal{O}(D_2)$ avec γ_D^* non connexe.

Preuve. Supposons $\underline{f} = \underline{f}' \underline{f}''$, avec \underline{f}' et \underline{f}'' des polynômes de Weierstrass non constants et sans facteur commun; leur résultant est donc un élément non nul de ${}_1\mathcal{O}$. On peut choisir un polycylindre D_2 et des représentants f'_D et f''_D de \underline{f}' et \underline{f}'' tels que le résultant de f'_D et f''_D soit une fonction de $\mathcal{O}(D_1)$ sans zéro dans D_1^* . Un argument déjà utilisé dans la preuve de la proposition 1 montre alors que f'_D et f''_D n'ont pas de zéro commun dans $D_2 - \{(0, 0)\}$. Par suite les ensembles

$$\gamma' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f'_D(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

et

$$\gamma'' = \{ (x, y) \in D_2 \mid f''_D(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad x \neq 0 \}$$

forment une partition en fermés non vides de γ_D^* , qui n'est donc pas connexe.

Supposons réciproquement qu'il existe un polycylindre D_2 tel que l'espace total du revêtement associé $\pi^*: \gamma_D^* \rightarrow D_1^*$ admette une partition en deux fermés non vides: $\gamma_D^* = \gamma' \cup \gamma''$. Par la proposition 1, le cardinal n' de $\gamma' \cap \pi^{-1}(x)$ ne dépend pas du choix de x dans D_1^* . Soient $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ les zéros de la fonction $y \mapsto f(x, y)$, numérotés de telle sorte que $\varphi_j(x) \in \gamma'$ pour $j \leq n'$. Posons

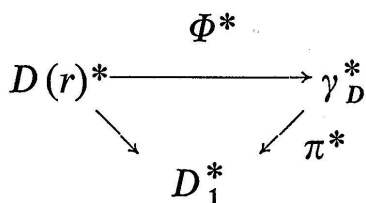
$$f'(x, y) = \prod_{j=1}^{n'} (y - \varphi_j(x)) \quad \text{et} \quad f''(x, y) = \prod_{j=n'+1}^n (y - \varphi_j(x))$$

pour tout $(x, y) \in D_2$. Les φ_j ne sont en général *pas* holomorphes (seules leurs fonctions symétriques élémentaires le sont). Il résulte néanmoins de la proposition 1 que, pour tout disque $\Delta_1 \subset D_1^*$, on peut faire en sorte que les φ_j soient holomorphes dans Δ_1 . Par suite, f' et f'' sont holomorphes au voisinage de tout point (x, y) avec $x \neq 0$, donc dans tout D_2 par le théorème d'extension de Riemann. En d'autres termes $\underline{f} = \underline{f}' \underline{f}''$ est réductible. ■

PROPOSITION 3. Supposons \underline{f} irréductible. Alors il existe un nombre positif r et une fonction holomorphe φ dans $D(r) = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| < r\}$ tels que $\begin{cases} D(r) \rightarrow \gamma_D \\ t \mapsto (t^n, \varphi(t)) \end{cases}$ soit un homéomorphisme.

Preuve. Avec les notations de la proposition 1, soient s le rayon de D_1 et r la racine positive n -ième de s . Notons $D(r)^*$ le disque $D(r)$ privé de l'origine. Les applications $t \mapsto t^n$ de $D(r)^*$ sur D_1^* et $(x, y) \mapsto x$ de γ_D^* sur D_1^* sont des revêtements holomorphes (proposition 1) connexes (propo-

sition 2) à n feuilles de l'espace D_1^* à groupe fondamental abélien. Il existe donc un isomorphisme analytique Φ^* rendant le diagramme



commutatif. Comme Φ^* est borné, il se prolonge par continuité en un morphisme bijectif $\Phi: D(r) \rightarrow \gamma_D$ de la forme $t \mapsto (t^n, \varphi(t))$ avec $\varphi \in \mathcal{O}(D(r))$. C'est alors un exercice facile de topologie générale de montrer que Φ est un homéomorphisme. ■

COROLLAIRE. Les courbes planes irréductibles sont des *variétés topologiques*.

Notons qu'une courbe plane (plus généralement une sous-variété de \mathbb{C}^k) analytiquement singulière n'est jamais une variété différentiable; voir par exemple [14], §2.

La proposition 3 exprime γ_D paramétriquement par $x = t^n$ et

$$y = \varphi(t) = a_0 t^m + a_1 t^{m+1} + \dots + a_k t^{m+k} + \dots (a_0 \neq 0);$$

on montre facilement qu'on ne restreint pas la généralité en supposant $m \geq n$. On écrit aussi

$$y = a_0 x^{m/n} + a_1 x^{(m+1)/n} + \dots + a_k x^{(m+k)/n} + \dots$$

et on parle alors du *développement de Puiseux* ou de la *série fractionnaire* associé au germe considéré.

I.2. LES TANGENTES EN UN POINT D'UNE COURBE PLANE

Soient k un entier positif et $\text{Ev}: {}_k\mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ l'évaluation à l'origine, qui n'est autre que la projection canonique de l'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ sur son corps résiduel.

PROPOSITION 4. L'anneau local ${}_k\mathcal{O}$ est *hensélien*. En d'autres termes, soient $P \in {}_k\mathcal{O}[t]$ un polynôme unitaire et $\rho, \sigma \in \mathbb{C}[t]$ des polynômes unitaires étrangers tels que $\text{Ev}(P) = \rho \sigma$. Alors il existe des polynômes unitaires R et S dans ${}_k\mathcal{O}[t]$ avec $P = RS$, $\text{Ev}(R) = \rho$ et $\text{Ev}(S) = \sigma$.

Attention : P n'est pas nécessairement un polynôme de Weierstrass.