Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN

Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.

Kapitel: II.1. Ensembles normaux

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

applique un point (x, y) sur l'intersection avec $\mathbf{S}^3$ de l'image du chemin $\begin{cases} \mathbf{R}_+^* \to \mathbf{C}^2 \\ t \mapsto (t^2 x, t^5 y) \end{cases}$. En particulier γ^* est connexe et $\underline{f}$ est bien irréductible.

La transformée stricte de f est donnée par

$$\tilde{f}(u, v) = v^{-2}(v^5 + (uv)^2) = u^2 + v^3$$

qui est comme f de multiplicité 2. La tangente de $\underline{\tilde{f}}$ est la droite d'équation $u = 0$, qui est transverse à E_0.

Soient alors $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $g(x, y) = x^3 + y^2$ de sorte que $\underline{g} = \underline{\tilde{f}}$ (pas $g(x, y) = x^2 + y^3$ qui aurait comme tangente la droite d'équation $x = 0$). On a $\tilde{g}(u, v) = u^2 + v$, qui est de multiplicité 1, et dont la tangente à l'origine est bien E_0.

Exemple 4. $D_2 = \mathbf{C}^2$ et $f(x, y) = y^5 + x^5 y + g(x, y)$ avec g de multiplicité 8 au moins. Montrons que $\underline{f}$ est réductible.

On a $\tilde{f}(u, v) = u^5 + uv + h(u, v)$ avec h d'ordre 3 au moins. Donc $\underline{\tilde{f}}$ a deux tangentes, d'où l'assertion par les propositions 5 et 6 (jj).

II. SINGULARITÉS NORMALES DANS $\mathbf{C}^3$

II.1. Ensembles normaux

Si X est un ensemble analytique, $X_{\text{rég}}$ désigne l'ouvert de ses *points réguliers*; on sait qu'il est dense dans X. (Voir le corollaire de la proposition 1 si X est une courbe plane, l'argument de la proposition 7 ci-dessous si X est une hypersurface dans $\mathbf{C}^k$, et le théorème III. C.3 de [8] en général.)

Rappelons qu'un ensemble X est *irréductible* en un point p si X n'est pas au voisinage de p réunion de deux sous-ensembles propres. Dans ce cas, on peut trouver un voisinage de p dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe. Réciproquement, s'il existe un bon voisinage U de P dans X dont la trace sur $X_{\text{rég}}$ est connexe, alors X est irréductible en p. (Voir la proposition 2 si X est une courbe plane, et la fin de la section III.C de [8] pour le cas général.) Le terme de « bon voisinage » pour U signifie qu'il existe une base de voisinages $\{U_\alpha\}$ de p dans X telle que chaque $U_\alpha - \{p\}$ soit un rétracte par déformation de $U - \{p\}$; voir [21].

On appelle fonction *faiblement holomorphe* sur un voisinage ouvert U d'un point p de X une fonction définie et holomorphe sur $U \cap X_{\text{rég}} - \{p\}$ qui est bornée sur $K \cap X_{\text{rég}} - \{p\}$ pour tout compact K de U; on dit que l'espace X est *normal* en p si toute fonction de ce type admet un prolongement (nécessairement unique par continuité) en une fonction holomorphe sur U. Par exemple, X est normal en tous ses points réguliers (c'est un cas particulier du théorème d'extension de Riemann) et n'est normal en aucun de ses points réductibles (choisir un voisinage connexe U de p dans X et une partition $U_0 \cup U_1$ de $U \cap X_{\text{rég}}$ en ouverts disjoints non vides, puis définir f comme valant 0 sur U_0 et 1 sur U_1). Soit $\mathcal{O}_{X,p}$ l'anneau des germes de fonctions holomorphes au voisinage d'un point p de X; pour que X soit normal en p, il faut et il suffit que $\mathcal{O}_{X,p}$ soit intégralement clos. (La nécessité résulte immédiatement des définitions; pour la suffisance, voir par exemple [18]; en général, la clôture intégrale de $\mathcal{O}_{X,p}$ coïncide avec l'anneau des germes de fonctions faiblement holomorphes.)

C'est un corollaire facile de la proposition 3 qu'une courbe plane est normale en un point si et seulement si elle y est lisse. Soient par exemple

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2 \mid x^2 = y^3\} \quad \text{et} \quad f: \begin{cases} \gamma - \{0\} \to \mathbf{C} \\ (x, y) \mapsto x/y\,; \end{cases}$$

alors f a un prolongement continu non holomorphe qui applique l'origine de $\mathbf{C}^2$ sur 0, de sorte que γ n'est pas normale à l'origine. Dans toute courbe (plane ou non), on sait que les points normaux coïncident avec les points lisses. L'objet de ce chapitre est d'examiner la nature des singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$.

Dans les sections suivantes, nous ferons un usage répété d'un théorème de H. Cartan [3]: Soient M une variété lisse et G un *groupe fini* opérant holomorphiquement sur M. Alors l'espace des orbites $X = M/G$ possède une structure canonique d'ensemble analytique normal (= normal en chaque point). Si $\pi: M \to X$ est la projection canonique, U un ouvert de X, et $f: U \to \mathbf{C}$ une application, alors f est holomorphe pour la structure en question si et seulement si $f\pi$ l'est sur $\pi^{-1}(U)$.

II.2. Les singularités des surfaces normales dans $\mathbf{C}^3$ sont isolées

Soit $\underline{\Gamma}$ un germe de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$. On peut supposer $\underline{\Gamma}$ donné par les zéros d'un polynôme de Weierstrass. Plus précisément, il existe