Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: III.3. Classification
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

Si $q = n - 1$, nous avons vu que ϕ est un isomorphisme de $X_{n,n-1}$ sur $A_{n,n-1}$; en d'autres termes que la *dimension de plongement* de la singularité normale $X_{n,n-1}$ est 3. On sait calculer en général la dimension de plongement de $X_{n,q}$: si $(n, q) = 1$ et avec les notations de la section IV.2, elle vaut $3 + \sum_{k=1}^{s} (b_k - 2)$. En particulier, la réciproque à l'assertion ci-dessus est aussi vraie: si $(n, q) = 1$ et si $X_{n,q}$ se plonge dans $\mathbf{C}^3$, alors $q = n - 1$. Voir [22], fin du § 3.

III.3. Classification

Soit Γ un germe de surface plongé dans $\mathbf{C}^3$. Reprenons les notations de la section II.2; supposons que le lieu discriminant exhibe une singularité consistant en un point double avec croisement normal — en d'autres termes, supposons qu'on puisse choisir les coordonnées de telle sorte que $\gamma_D = \{(x, y) \in D_2 \mid xy = 0\}$. Nous noterons D_2^{**} l'espace $D_2 - \gamma_D$ et Γ_D^{**} son image inverse par π; la projection se restreint en un revêtement à n feuilles $\pi^{**}: \Gamma_D^{**} \to D_2^{**}$. On identifie comme à la section précédente le groupe fondamental de D_2^{**} à $\mathbf{Z}^2$.

Proposition 14. Il existe un polycylindre E_2 dans $\mathbf{C}^2$, un morphisme $\rho^{**}: \Gamma_D^{**} \to E_2^{**}$ et des entiers n, q avec $0 \leqslant q < n$ et $(n, q) = 1$ tels que ρ^{**} induise une injection de Fond (Γ_D^{**}) sur le sous-groupe de Fond $(E_2^{**}) = \mathbf{Z}^2$ engendré par $(n, 0)$ et $(q, 1)$.

Preuve. Soit G l'image de Fond (Γ_D^{**}) dans $\mathbf{Z}^2$ définie par π^{**}. C'est un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{Z}^2$ car π^{**} est un revêtement fini. Par suite G contient des éléments de la forme $(k, 0)$; soit

$$a = \inf\{\, |k| \mid (k, 0) \in G \quad \text{et} \quad k \neq 0 \,\}\,.$$

On peut choisir un vecteur (b, c) formant avec $(a, 0)$ une base de G, tel que $0 \leqslant b < a$ et $c > 0$.

Soit d le plus grand commun diviseur de a et b (avec $d = a$ si b est nul). Soient $E_2 = \{\, (u, v) \in \mathbf{C}^2 \mid (u^d, v^c) \in D_2 \,\}$ et $E_2^{**} = \{\, (u, v) \in E_2 \mid uv \neq 0 \,\}$.

L'application $\kappa^{**}\colon (u, v) \mapsto (u^d, v^c)$ de E_2^{**} sur D_2^{**} est un revêtement holomorphe connexe à dc feuilles, et induit une injection de $\mathrm{Fond}\,(E_2^{**})$ sur le sous-groupe de $\mathbf{Z}^2 = \mathrm{Fond}\,(D_2^{**})$ engendré par $(d, 0)$ et $(0, c)$. Ce groupe contenant G, il existe un morphisme ρ^{**} rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & E_2^{**} \arrow[d, "\kappa^{**}"] \\
\Gamma_D^{**} \arrow[ur, "\rho^{**}"] \arrow[r, "\pi^{**}"] & D_2^{**}
\end{tikzcd}$$

commutatif. Au niveau des groupes fondamentaux, ρ^{**} induit un isomorphisme de $\mathrm{Fond}\,(\Gamma_D^{**})$ sur le sous-groupe de $\mathbf{Z}^2 = \mathrm{Fond}\,(E_2^{**})$ engendré par $(a/d, 0/c)$ et $(b/d, c/c)$. ■

Proposition 15. Avec les notations de la proposition 14, le germe $\tilde{\underline{\Gamma}}$ normalisé de $\underline{\Gamma}$ est isomorphe au germe de $X_{n,q}$ au point singulier.

Preuve. Soient $\rho^{**}\colon \Gamma_D^{**} \to E_2^{**}$ comme dans la preuve précédente et $\pi^{**}\colon A_{n,q}^{**} \to \mathbf{C}^{**}$ comme dans la section précédente. Soient $V = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid (x, y) \in E_2 \}$ et π_V^{**} la restriction de π^{**} à $A_{n,q}^{**} \cap V$. Les revêtements ρ^{**} et π_V^{**} définissent le même sous-groupe de $\mathrm{Fond}\,(E_2^{**})$. Il existe donc des morphismes g et h, inverses l'un de l'autre, rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_{n,q}^{**} \cap V \arrow[rr, shift left, "g"] \arrow[dr, "\pi_V^{**}"'] & & \Gamma_D^{**} \arrow[ll, shift left, "h"] \arrow[dl, "\rho^{**}"] \\
 & E_2^{**} &
\end{tikzcd}$$

commutatif. Le morphisme g est borné car π l'est et ρ^{**} est propre; de même, h est borné. Le raisonnement usuel (voir par exemple celui qui précède la proposition 13) montre que g et h permettent de définir un isomorphisme du normalisé de $A_{n,q} \cap V$ avec $\tilde{\Gamma}_D$, c'est-à-dire du germe de $X_{n,q}$ au point singulier avec $\tilde{\underline{\Gamma}}$. ■