Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN

Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.

Kapitel: IV.2. Trois suites numériques définies par n et q

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50380

transformée stricte de l'axe d'équation $x = y = 0$ dans $\mathbf{C}^3$. Alors $D_f = 2A + E$, d'où par (jv) ci-dessus

$$\langle D_f \mid E \rangle = 2 \langle A \mid E \rangle + \langle E \mid E \rangle = 0$$

et par (jjj) $\langle E \mid E \rangle = -2$.

Exemple 3. Soit $S_{(-k)}$ comme à la section I.3, avec deux cartes — disons deux copies R_0 et R_1 de $\mathbf{C}^2$ — recollées selon l'isomorphisme que nous écrirons ici

$$\begin{cases} \{(u,v) \in R_0 \mid u \neq 0\} \to \{(u,v) \in R_1 \mid v \neq 0\} \\ (u,v) \mapsto (u^k v, 1/u) \end{cases} .$$

Considérons d'une part les fonctions ξ_0, η_0, $\zeta_0 \colon R_0 \to \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_0(u,v) = u^k v \qquad \eta_0(u,v) = v \qquad \zeta_0(u,v) = uv$$

et d'autre part les fonctions ξ_1, η_1, $\zeta_1 \colon R_1 \to \mathbf{C}$ définies par

$$\xi_1(u,v) = u \qquad \eta_1(u,v) = uv^k \qquad \zeta_1(u,v) = uv^{k-1} .$$

On vérifie sans peine que ces données définissent trois fonctions globales ξ, η, $\zeta \colon S_{(-k)} \to \mathbf{C}$ satisfaisant l'égalité $\zeta^k = \xi \eta^{k-1}$, donc aussi une application $\rho \colon S_{(-k)} \to A_{k,1}$. Le lecteur s'assurera à titre d'exercice que ρ est une résolution de $A_{k,1}$, que la matrice d'intersection se réduit au nombre $-k$, et que ρ se relève en $\tilde{\rho} \colon S_{(-k)} \to X_{k,1}$. L'application $\tilde{\rho}$ résout donc la singularité définie par le groupe cyclique

$$\left\{ \begin{pmatrix} e(j/k) & 0 \\ 0 & e(j/k) \end{pmatrix} \in \operatorname{Aut}(\mathbf{C}^2) \;\middle|\; j = 0, \ldots, k-1 \right\} .$$

Si $k = 2$, on retrouve l'exemple 1.

Citons enfin sans démonstration le théorème suivant: pour toute singularité isolée de dimension deux et pour toute désingularisation (minimale ou non), la matrice d'intersection associée est négative définie. Les exemples ci-dessus offrent une première illustration de ce résultat. Voir [16], § 1.

IV.2. Trois suites numériques définies par n et q

Le contenu des paragraphes 2 et 3 se trouve dans [9].

Soient n et q des entiers avec $0 < q < n$.

Posons $\lambda_0 = n$ et $\lambda_1 = q$. Définissons ensuite les entiers $\lambda_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ par l'algorithme euclidien suivant:

$$\lambda_2 = b_1\lambda_1 - \lambda_0 \quad \text{avec} \quad b_1 \geqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda_2 < \lambda_1$$
$$\lambda_3 = b_2\lambda_2 - \lambda_1 \quad \text{avec} \quad b_2 \geqslant 2 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant \lambda_3 < \lambda_2$$

Soit s le plus grand entier pour lequel λ_s soit non nul, de sorte que

$$\lambda_s = b_{s-1}\,\lambda_{s-1} - \lambda_{s-2} \quad \text{avec} \quad b_{s-1} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 < \lambda_s < \lambda_{s-1}$$
$$0 = b_s\,\lambda_s - \lambda_{s-1}\,.$$

On vérifie sans peine que λ_s est le plus grand commun diviseur de n et q, ce qui s'écrit $\lambda_s = (n, q)$. On définit $\lambda_{s+1} = 0$. On peut remarquer que les équations ci-dessus s'écrivent aussi

$$\frac{n}{q} = b_1 - \frac{\lambda_2}{q}, \ \frac{q}{\lambda_2} = b_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}, \ldots,$$
$$\frac{\lambda_{s-2}}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{\lambda_s}{\lambda_{s-1}} = b_{s-1} - \frac{1}{b_s}.$$

D'où

$$\frac{n}{q} = b_1 - \cfrac{1}{b_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{b_s}}}$$

ce que certains auteurs notent plus économiquement

$$\frac{n}{q} = b_1 - 1\big/\overline{b_2} - \ldots - 1\big/\overline{b_s}\,.$$

On définit ensuite les suites $(\mu_k)_{k=0,\ldots,s+1}$ et $(\nu_k)_{k=0,\ldots,s+1}$ par

$$\begin{array}{llll}
\mu_0 = 0 & & \nu_0 = 1 \\
\mu_1 = 1 & & \nu_1 = 1 \\
\mu_2 = b_1\,\mu_1 - \mu_0 & & \nu_2 = b_1\,\nu_1 - \nu_0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\mu_s = b_{s-1}\,\mu_{s-1} - \mu_{s-2} & & \nu_s = b_{s-1}\,\nu_{s-1} - \nu_{s-2} \\
\mu_{s+1} = b_s\,\mu_s - \mu_{s-1} & & \nu_{s+1} = b_s\,\nu_s - \nu_{s-1}
\end{array}$$

Lemme. Pour tout $k \in \{0, 1, ..., s\}$ on a:

$$\text{(a)} \quad \lambda_k + (n-q)\mu_k = n\nu_k$$
$$\text{(b)} \quad \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1}\mu_k = n$$
$$\text{(c)} \quad \mu_{k+1}\nu_k - \mu_k \nu_{k+1} = 1\,.$$

De plus

$$0 = \mu_0 < \mu_1 < \ldots < \mu_{s+1} = \frac{n}{(n, q)}$$

et

$$1 = \nu_0 \leqslant \nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_{s+1} = \frac{n-q}{(n, q)}\,.$$

Preuve. Les relations (a), (b) et (c) sont banales si $k = 0$ et si $k = 1$. Pour $k \geqslant 2$, elles résultent des calculs élémentaires suivants:

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1} + (n-q)\mu_{k+1} &= b_k\lambda_k - \lambda_{k-1} + (n-q)(b_k\mu_k - \mu_{k-1}) \\ &= b_k\big(\lambda_k + (n-q)\mu_k\big) - \big(\lambda_{k-1} + (n-q)\mu_{k-1}\big) = b_k n\nu_k - n\nu_{k-1} \\ &= n\nu_{k+1} \qquad (k = 1, ..., s)\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_{k+1}\mu_{k+2} - \lambda_{k+2}\mu_{k+1} &= \lambda_{k+1}(b_{k+1}\mu_{k+1} - \mu_k) - (b_{k+1}\lambda_{k+1} - \lambda_k)\mu_{k+1} \\ &= \lambda_k \mu_{k+1} - \lambda_{k+1}\mu_k \quad (k = 1, \ldots, s-1)\,;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_{k+2}\nu_{k+1} - \mu_{k+1}\nu_{k+2} &= (b_{k+1}\mu_{k+1} - \mu_k)\nu_{k+1} - \mu_{k+1}(b_{k+1}\nu_{k+1} - \nu_k) \\ &= \mu_{k+1}\nu_k - \mu_k\nu_{k+1} \qquad (k = 1, \ldots, s-1)\,.\end{aligned}$$

En particulier, comme $\lambda_{s+1} = 0$, on a $0 + (n-q)\,\mu_{s+1} = n\nu_{s+1}$ et $\lambda_s\mu_{s+1} = n$, d'où $\mu_{s+1} = \dfrac{n}{\lambda_s} = \dfrac{n}{(n, q)}$ et $\nu_{s+1} = \dfrac{n-q}{(n, q)}$. Enfin, comme $b_k \geqslant 2$ pour $k = 1, ..., s$, on a

$$\mu_{k+1} - \mu_k = (b_k - 1)\mu_k - \mu_{k-1} \geqslant \mu_k - \mu_{k-1} \geqslant \ldots \geqslant \mu_1 - \mu_0 > 0$$

et

$$\nu_{k+1} - \nu_k \geqslant \ldots \geqslant \nu_1 - \nu_0 \geqslant 0\,.$$

ce qui achève la preuve. ■

Nous reviendrons à plusieurs reprises sur les exemples décrits dans le tableau suivant:

n	10	8	6	4
q	8	6	4	2
s	4	3	2	1
$(\lambda_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(10,8,6,4,2,0)	(8,6,4,2,0)	(6,4,2,0)	(4,2,0)
$(\mu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(0,1,2,3,4,5)	(0,1,2,3,4)	(0,1,2,3)	(0,1,2)
$(\nu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1)

IV.3. Les résolutions $\rho: M_{n,q} \to A_{n,q}$ ou $\tilde{\rho}: M_{n,q} \to X_{n,q}$

Soient à nouveau n et q comme à la section 2, dont on reprend toutes les notations.

Pour chaque $k \in \{ 0, 1, ..., s \}$, désignons par R_k une copie de C^2, par (u_k, v_k) ses coordonnées canoniques, et par R_k' [resp. R_k''] l'ouvert de ses points de première [resp. seconde] coordonnée non nulle. Pour $k \in \{ 1, ..., s \}$, soit

$$\varphi_{k-1} : \begin{cases} R'_{k-1} & \to \qquad R''_k \\ (u_{k-1}, v_{k-1}) & \mapsto \left((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1}\,,\ (u_{k-1})^{-1}\right) \end{cases} ;$$

c'est un isomorphisme dont l'inverse applique (u_k, v_k) sur $(1/v_k, v_k^{b_k} u_k)$. Notons $R_{0,1}$ la variété obtenue en recollant R_0 et R_1 selon φ_0, déjà considérée à l'exemple 3 de la section 1. Soient ensuite $R_{0,1,2}$ la variété obte ue en recollant $R_{0,1}$ et R_2 selon φ_1, ..., et $R_{0,1,...,s} = M_{n,q}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1,...,s-1}$ et R_s selon φ_{s-1}. Nous identifierons chaque R_k à son image dans $M_{n,q}$. La variété $M_{n,q}$ est une *surface lisse* dans laquelle chaque R_k est un ouvert dense (de fait un ouvert de Zariski).

Pour chaque $k \in \{ 1, ..., s \}$, considérons la *courbe*

$$\sigma_k = \{ (u_{k-1}, v_{k-1}) \in R_{k-1} \mid v_{k-1} = 0 \} \cup \{ (u_k, v_k) \in R_k \mid u_k = 0 \}$$

qui est lisse et isomorphe à P^1. Notons encore σ_{in} et σ_{fi} les courbes lisses non compactes définies respectivement par $\{ (u_0, v_0) \in R_0 \mid u_0 = 0 \}$