

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SINGULARITÉS DE KLEIN
Autor: de la Harpe, P. / Siegfried, P.
Kapitel: IV.3. Les résolutions $\rho: M_{\{n,q\}} \rightarrow A_{\{n,q\}}$ ou $\tilde{\rho}: M_{\{n,q\}} \rightarrow X_{\{n,q\}}$
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

n	10	8	6	4
q	8	6	4	2
s	4	3	2	1
$(\lambda_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(10,8,6,4,2,0)	(8,6,4,2,0)	(6,4,2,0)	(4,2,0)
$(\mu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(0,1,2,3,4,5)	(0,1,2,3,4)	(0,1,2,3)	(0,1,2)
$(\nu_k)_{0 \leq k \leq s+1}$	(1,1,1,1,1,1)	(1,1,1,1,1)	(1,1,1,1)	(1,1,1)

IV.3. LES RÉOLUTIONS $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ OU $\tilde{\rho}: M_{n,q} \rightarrow X_{n,q}$

Soient à nouveau n et q comme à la section 2, dont on reprend toutes les notations.

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, s\}$, désignons par R_k une copie de C^2 , par (u_k, v_k) ses coordonnées canoniques, et par R'_k [resp. R''_k] l'ouvert de ses points de première [resp. seconde] coordonnée non nulle. Pour $k \in \{1, \dots, s\}$, soit

$$\varphi_{k-1} : \begin{cases} R'_{k-1} & \rightarrow & R''_k \\ (u_{k-1}, v_{k-1}) & \mapsto & ((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1}, (u_{k-1})^{-1}) \end{cases};$$

c'est un isomorphisme dont l'inverse applique (u_k, v_k) sur $(1/v_k, v_k^{b_k} u_k)$. Notons $R_{0,1}$ la variété obtenue en recollant R_0 et R_1 selon φ_0 , déjà considérée à l'exemple 3 de la section 1. Soient ensuite $R_{0,1,2}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1}$ et R_2 selon φ_1 , ..., et $R_{0,1,\dots,s} = M_{n,q}$ la variété obtenue en recollant $R_{0,1,\dots,s-1}$ et R_s selon φ_{s-1} . Nous identifierons chaque R_k à son image dans $M_{n,q}$. La variété $M_{n,q}$ est une *surface lisse* dans laquelle chaque R_k est un ouvert dense (de fait un ouvert de Zariski).

Pour chaque $k \in \{1, \dots, s\}$, considérons la *courbe*

$$\sigma_k = \{(u_{k-1}, v_{k-1}) \in R_{k-1} \mid v_{k-1} = 0\} \cup \{(u_k, v_k) \in R_k \mid u_k = 0\}$$

qui est lisse et isomorphe à P^1 . Notons encore σ_{in} et σ_{fi} les courbes lisses non compactes définies respectivement par $\{(u_0, v_0) \in R_0 \mid u_0 = 0\}$

et $\{(u_s, v_s) \in R_s \mid v_s = 0\}$. Ces courbes n'ont pas d'intersection triple et n'ont deux à deux que des intersections transverses. On vérifie facilement que

$$\begin{aligned} \langle \sigma_{in} \mid \sigma_k \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ \langle \sigma_j \mid \sigma_k \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } |j - k| = 1 \\ 0 & \text{si } |j - k| \geq 2 \end{cases} \\ \langle \sigma_{fi} \mid \sigma_k \rangle &= \begin{cases} 1 & \text{si } k = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Pour chaque $k \in \{0, 1, \dots, s\}$, considérons enfin les *fonctions*

$$\begin{aligned} \xi_k &: \begin{cases} R_k & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (u_k, v_k) & \mapsto & (u_k)^{\lambda_k} (v_k)^{\lambda_k+1} \end{cases} \\ \eta_k &: \begin{cases} R_k & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (u_k, v_k) & \mapsto & (u_k)^{\mu_k} (v_k)^{\mu_k+1} \end{cases} \\ \zeta_k &: \begin{cases} R_k & \rightarrow & \mathbf{C} \\ (u_k, v_k) & \mapsto & (u_k)^{\nu_k} (v_k)^{\nu_k+1} \end{cases} \end{aligned}$$

Si $k \geq 1$ et $u_{k-1} \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} \xi_k(\varphi_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1})) &= ((u_{k-1})^{b_k} v_{k-1})^{\lambda_k} \left(\frac{1}{u_{k-1}} \right)^{\lambda_k+1} \\ &= (u_{k-1})^{b_k \lambda_k - \lambda_k + 1} (v_{k-1})^{\lambda_k} = \xi_{k-1}(u_{k-1}, v_{k-1}). \end{aligned}$$

Par suite les ξ_k définissent une fonction globale $\xi: M_{n,q} \rightarrow \mathbf{C}$. Les η_k et les ζ_k définissent de même $\eta, \zeta: M_{n,q} \rightarrow \mathbf{C}$. Notons que $\zeta^n = \xi \eta^{n-q}$. Il suffit en effet de vérifier cette relation sur l'ouvert dense $R_0 \subset M_{n,q}$, et on a pour tout $(u, v) \in R_0$:

$$(\zeta(u, v))^n - (\xi(u, v)) (\eta(u, v))^{n-q} = (uv)^n - (u^n v^q) (v)^{n-q} = 0.$$

Nous noterons $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ le morphisme défini par $\rho(P) = (\xi(P), \eta(P), \zeta(P))$.

PROPOSITION 16. Le morphisme $\rho: M_{n,q} \rightarrow A_{n,q}$ est surjectif, $\rho^{-1}(0, 0, 0) = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s$, $\rho^{-1}\{(0, y, 0) \in A_{n,q} \mid y \in \mathbf{C}\} = \rho_{in}$ et $\rho^{-1}\{(x, 0, 0) \in A_{n,q} \mid x \in \mathbf{C}\} = \sigma_{fi}$.

Si de plus $(n, q) = 1$, la restriction de ρ fournit une bijection de $M_{n,q} - \bigcup_{k=1}^s \sigma_k$ sur $A_{n,q} - \{0\}$.

Preuve. Il est immédiat que $\rho(\sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_s) = (0, 0, 0)$.

Soit $P = (x, y, z) \in A_{n,q}$ avec $y \neq 0$. Posons $u_0 = z/y$ et $v_0 = y$; alors $\rho(u_0, v_0) = (u_0^n v_0^q, v_0, u_0 v_0) = P$. Soit $(u_k, v_k) \in \rho^{-1}(P) \cap R_k$; alors $\eta(u_k, v_k) = (u_k)^{\mu_k} (v_k)^{\mu_k+1} = y \neq 0$. Si $k \geq 1$, les entiers μ_k et μ_{k+1} sont strictement positifs, donc $u_k \neq 0$ et $v_k \neq 0$, de sorte que $(u_k, v_k) \in R_k \cap R_0$. Si $k = 0$, les équations $u_0^n v_0^q = x$, $v_0 = y$, $u_0 v_0 = z$ n'ont qu'une solution. Nous avons ainsi montré que $\rho^{-1}(P)$ ne contient qu'un point, qui n'est pas dans la réunion des σ_k , et qui est dans σ_{in} si et seulement si $P = (0, y, 0)$.

Soit $Q = (x, 0, 0) \in A_{n,q}$ avec $x \neq 0$ (rappelons que c'est un point singulier de $A_{n,q}$ si $q \neq n - 1$). Pour $k \in \{0, 1, \dots, s - 1\}$, les équations $(u_k)^{\lambda_k} (v_k)^{\lambda_k+1} = x \neq 0$, $(u_k)^{\mu_k} (v_k)^{\mu_k+1} = (u_k)^{\nu_k} (v_k)^{\nu_k+1} = 0$ n'ont aucune solution. Par contre, les équations

$$(u_s)^{\lambda_s} = x \quad (u_s)^{\mu_s} (v_s)^{\mu_s+1} = (u_s)^{\nu_s} (v_s)^{\nu_s+1} = 0$$

ont précisément $\lambda_s = (n, q)$ solutions. Donc $\gamma^{-1}(Q)$ contient (n, q) points, donc aucun n'est dans la réunion des σ_k , et qui sont tous dans σ_{fi} . ■

PROPOSITION 17. On a $\langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = -b_k$ pour $k \in \{1, 2, \dots, s\}$.

Preuve. Les diviseurs définis par les fonctions ξ , η et ζ sont respectivement

$$D_\xi = n\sigma_{in} + q\sigma_1 + \dots + \lambda_k \sigma_k + \dots + (n, q) \sigma_s$$

$$D_\eta = \sigma_1 + \dots + \mu_k \sigma_k + \dots + \mu_s \sigma_s + \frac{n}{(n, q)} \sigma_{fi}$$

$$D_\zeta = \sigma_{in} + \sigma_1 + \dots + \nu_k \sigma_k + \dots + \nu_s \sigma_s + \frac{n - q}{(n, q)} \sigma_{fi}$$

Si on écrit provisoirement σ_0 pour σ_{in} et σ_{s+1} pour σ_{fi} , la première de ces formules et les calculs précédant la proposition 16 montrent qu'on a

$$0 = \langle D_\xi | \sigma_k \rangle = \lambda_{k-1} \langle \sigma_{k-1} | \sigma_k \rangle + \lambda_k \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle + \lambda_{k+1} \langle \sigma_{k+1} | \sigma_k \rangle$$

d'où

$$\langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = (-1/\lambda_k) (\lambda_{k+1} + \lambda_{k-1}) = -b_k$$

pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$. On pourrait aussi utiliser

$$0 = \langle D_\eta | \sigma_k \rangle \Rightarrow \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = (-1/\mu_k) (\mu_{k+1} + \mu_{k-1}) = -b_k$$

ou

$$0 = \langle D_\zeta | \sigma_k \rangle \Rightarrow \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle = (-1/\nu_k) (\nu_{k+1} + \nu_{k-1}) = -b_k. \quad \blacksquare$$

On peut remarquer qu'il n'existe aucun prolongement de la forme d'intersection à $\text{Div}(M) \times \text{Div}(M)$ qui jouisse encore des propriétés (j) à (v) du § 1. En effet, on aurait alors par exemple

$$0 = \langle D_\xi | \sigma_{in} \rangle = n \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle + q \Rightarrow \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle = -q/n$$

$$0 = \langle D_\eta | \sigma_{in} \rangle = 1 !!!$$

$$0 = \langle D_\zeta | \sigma_{in} \rangle = \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle + \langle \sigma_1 | \sigma_{in} \rangle \Rightarrow \langle \sigma_{in} | \sigma_{in} \rangle = -1$$

ce qui est plusieurs fois absurde.

COROLLAIRE. La matrice d'intersection $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle_{1 \leq j, k \leq s}$ est définie négative. Si $q = n - 1$, c'est la matrice de Cartan A_{n-1} .

Remarque. Le déterminant de A_{n-1} est en valeur absolue l'ordre du groupe d'homologie $H_1(X_{n,n-1} - \{0\}, \mathbf{Z})$; voir [16], page 11.

Preuve. La matrice d'intersection est

$$\begin{bmatrix} -b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -b_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -b_s \end{bmatrix}$$

Si D_k est son k -ième mineur principal, on a $D_s = -b_s D_{s-1} - D_{s-2}$. Il résulte de critères standards (voir par exemple [6], § 36, exercice 33) que la matrice d'intersection est négative définie. Si $q = n - 1$, on a $s = n - 1$ et par induction $D_s = \det(A_{n-1}) = (-1)^s n$. ■

Nous résumons les informations obtenues jusqu'ici dans le résultat suivant.

THÉOREME A. Le morphisme ρ se relève en une désingularisation

$$\tilde{\rho} : M_{n,q} \rightarrow X_{n,q}.$$

Le schéma de Dynkin, qui a un sommet muni de l'entier $b_k = - \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle$ pour chaque composante irréductible σ_k de la fibre exceptionnelle, et une arête liant les sommets définis par σ_j et σ_k si $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle \neq 0$, est

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & & b_s & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet \end{array} \quad (\bullet = P^1)$$

Si $q = n - 1$, la matrice $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle_{1 \leq j, k \leq s}$ est la matrice de Cartan A_{n-1} .

Preuve. L'existence de $\tilde{\rho}$ résulte de la proposition 8; les autres affirmations de ce qui précède. ■

IV.4. RELATION AVEC LES ÉCLATEMENTS

Soit $\pi: S \rightarrow \mathbf{C}^2$ l'éclatement de \mathbf{C}^2 à l'origine, comme en I.3. Considérons ici $T = \mathbf{C} \times S$ et $\tau: T \rightarrow \mathbf{C}^3$ l'application $\text{id} \times \pi$ qui est l'éclatement de \mathbf{C}^3 le long de la droite d'équations $y = z = 0$. On munit T comme en I.3 d'un atlas à deux cartes $\psi_j: T_j \rightarrow \mathbf{C}^3$ ($j = 0, 1$), avec les changements de cartes donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} = \psi_0(T_0 \cap T_1) \rightarrow \psi_1(T_0 \cap T_1) = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ (x, y, z) \mapsto (x, 1/y, yz) \end{cases}$$

et par l'isomorphisme inverse. L'application τ s'écrit dans les cartes

$$\tau_0: \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_0(T_0) \rightarrow \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, z, yz) \end{cases}$$

et

$$\tau_1: \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_1(T_1) \rightarrow \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, yz, z) \end{cases}$$

La transformée stricte de $A_{n,q} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q} \}$ apparaît dans une carte comme la surface lisse

$$\{ (x, y, z) \in \psi_0(T_0) \mid y^n z^q = x \}$$

et dans l'autre comme

$$\{ (x, y, z) \in \psi_1(T_1) \mid z^q = xy^{n-q} \} \approx A_{q, 2q-n}.$$

Au niveau des normalisés, l'éclatement permet donc de « remplacer » $X_{n,q}$ par $X_{q,\lambda}$ avec $0 < \lambda < q$ et $\lambda = (2+r)q - n$ pour un entier positif