

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SINGULARITÉS DE KLEIN  
**Autor:** de la Harpe, P. / Siegfried, P.  
**Kapitel:** IV.4. Relation avec les éclatements  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50380>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Le schéma de Dynkin, qui a un sommet muni de l'entier  $b_k = - \langle \sigma_k | \sigma_k \rangle$  pour chaque composante irréductible  $\sigma_k$  de la fibre exceptionnelle, et une arête liant les sommets définis par  $\sigma_j$  et  $\sigma_k$  si  $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle \neq 0$ , est

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & & b_s & & \\ \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \bullet & \text{---} & \dots & \text{---} & \bullet \end{array} \quad (\bullet = P^1)$$

Si  $q = n - 1$ , la matrice  $\langle \sigma_j | \sigma_k \rangle_{1 \leq j, k \leq s}$  est la matrice de Cartan  $A_{n-1}$ .

*Preuve.* L'existence de  $\tilde{\rho}$  résulte de la proposition 8; les autres affirmations de ce qui précède. ■

#### IV.4. RELATION AVEC LES ÉCLATEMENTS

Soit  $\pi: S \rightarrow \mathbf{C}^2$  l'éclatement de  $\mathbf{C}^2$  à l'origine, comme en I.3. Considérons ici  $T = \mathbf{C} \times S$  et  $\tau: T \rightarrow \mathbf{C}^3$  l'application  $\text{id} \times \pi$  qui est l'éclatement de  $\mathbf{C}^3$  le long de la droite d'équations  $y = z = 0$ . On munit  $T$  comme en I.3 d'un atlas à deux cartes  $\psi_j: T_j \rightarrow \mathbf{C}^3$  ( $j = 0, 1$ ), avec les changements de cartes donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} = \psi_0(T_0 \cap T_1) \rightarrow \psi_1(T_0 \cap T_1) = \mathbf{C} \times \mathbf{C}^* \times \mathbf{C} \\ (x, y, z) \mapsto (x, 1/y, yz) \end{cases}$$

et par l'isomorphisme inverse. L'application  $\tau$  s'écrit dans les cartes

$$\tau_0: \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_0(T_0) \rightarrow \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, z, yz) \end{cases}$$

et

$$\tau_1: \begin{cases} \mathbf{C}^3 = \psi_1(T_1) \rightarrow \mathbf{C}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (x, yz, z) \end{cases}$$

La transformée stricte de  $A_{n,q} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^n = xy^{n-q} \}$  apparaît dans une carte comme la surface lisse

$$\{ (x, y, z) \in \psi_0(T_0) \mid y^n z^q = x \}$$

et dans l'autre comme

$$\{ (x, y, z) \in \psi_1(T_1) \mid z^q = xy^{n-q} \} \approx A_{q, 2q-n}.$$

Au niveau des normalisés, l'éclatement permet donc de « remplacer »  $X_{n,q}$  par  $X_{q,\lambda}$  avec  $0 < \lambda < q$  et  $\lambda = (2+r)q - n$  pour un entier positif

convenable  $r$  (nous avons utilisé ici les remarques qui précèdent la proposition 13). Avec les notations de la section 2, on a précisément  $\lambda = \lambda_2$  et  $2 + r = b_1$ .

En cherchant à itérer l'argument jusqu'à trouver une surface lisse, on aurait précisément à considérer les suites numériques de la section 2.

## V. L'ICOSAÈDRE ET LES SOUS-GROUPES FINIS NON CYCLIQUES DE $SU(2)$

### V.1. LE CAS DE L'ICOSAÈDRE

Soient  $h: \mathbf{C}^2 - \{0\} \rightarrow P^1 = \mathbf{S}^2$  la projection canonique et  $\delta: SU(2) \rightarrow SO(3)$  le revêtement universel (à deux feuillets) du groupe des automorphismes analytiques isométriques de  $P^1$  (= du groupe des rotations de la sphère). Soient  $\underline{G}$  le sous-groupe de  $SO(3)$  des rotations qui laissent invariant un icosaèdre régulier inscrit dans  $\mathbf{S}^2$ , et  $G = \delta^{-1}(\underline{G})$ ; nous noterons encore  $\delta$  la projection canonique de  $G$  sur  $\underline{G}$ . Le groupe  $\underline{G}$  a 60 éléments; ses orbites sur  $\mathbf{S}^2$  ont aussi 60 points à trois exceptions près qui sont

l'orbite  $\underline{\mathcal{A}} = \{ \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{12} \}$  des sommets de l'icosaèdre

l'orbite  $\underline{\mathcal{B}} = \{ \underline{b}_1, \dots, \underline{b}_{20} \}$  des barycentres de ses faces

l'orbite  $\underline{\mathcal{C}} = \{ \underline{c}_1, \dots, \underline{c}_{30} \}$  des milieux de ses arêtes.

Le groupe  $G$  agit linéairement dans  $\mathbf{C}^2$ ; ses orbites ont toutes 120 points, à la seule exception de l'origine.

Le quotient  $X_{ico} = \mathbf{C}^2/G$  est un ensemble analytique, normal par le théorème de Cartan; il a un unique point non lisse, que nous noterons  $x_0$  et qui est l'image canonique de l'origine de  $\mathbf{C}^2$ . Nous renvoyons à [12], chapitre II, § 13 et/ou à [15], théorème 4.5 pour le résultat classique suivant (dont nous ne faisons pas usage ci-dessous): il existe une application polynômiale  $\tilde{\phi}: \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}^3$  qui fournit par passage au quotient un isomorphisme  $\phi$  de  $X_{ico}$  sur la surface de  $\mathbf{C}^3$  à singularité unique

$$A_{ico} = \{ (x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid z^5 = x^2 + y^3 \}.$$