Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOMMES DE BICARRÉS DANS $Z[\sqrt{-1}]$ ET $Z[\sqrt[3]{1}]$
Autor: Revoy, Ph.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50381

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Siehe Rechtliche Hinweise.

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. Voir Informations légales.

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. See Legal notice.

Download PDF: 18.04.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

SOMMES DE BICARRÉS DANS $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ ET $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{1}]$

par Ph. REVOY

La résolution du problème de Waring pour N est fondée sur des identités algébriques, dont la première est celle de Liouville pour les bicarrés: $6\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)^2 = \sum_{1\leq i<j\leq 4} [(a_i+a_j)^4 + (a_i-a_j)^4]$. De même, à la base des études sur le problème « facile » de Waring se trouvent toujours des identités algébriques ([1], [2]).

Nous montrons ici à l'aide de diverses identités que dans $Z[i]$ et dans $\mathbf{Z}[\rho]$ où $\rho^2+\rho+1=0$ tout entier qui est somme de bicarrés est somme d'au plus 12 bicarrés. Nous dirons qu'un élément a d'un anneau est B_n s'il est somme de n bicarrés d'éléments de l'anneau.

1. Dans [3], I. Niven montre que tout entier de Gauss de la forme $a + 24\,bi$, $a, b \in \mathbf{Z}$ est somme d'au plus 18 bicarrés et que tout entier de Gauss qui est B_n a sa partie imaginaire divisible par 24. Ici, nous allons établir:

THÉOREME 1. *Tout entier de Gauss de la forme* $a + 24\,bi$ *est somme d'au plus* 12 *bicarrés.*

La divisibilité par 24 de la partie imaginaire provient de ce que $\operatorname{Im}(x+iy)^4 = 4xy\,(x^2-y^2)$: si $xy \neq 0\,(2)$, $x^2-y^2 = 0\,(2)$ et si $xy \neq 0\,(3)$, $x^2 = y^2 = 1\,(3)$. Dans [3], I. Niven montre que tout entier de Gauss de la forme $48z + 12$ ou de la forme $48z + 24i + 36$ est B_{12} à l'aide de l'identité:

$$6\,(X^2+Y^2)^2 = 2\,(X+Y)^4 + 2\,(X-Y)^4 + (X+iY)^4 + (X-iY)^4\,. \tag{1}$$

En fait, on peut montrer le

LEMME . *Tout entier de Gauss de la forme* $24z + a$ *avec* $a = 9, 10, 12$ *ou* 16 *est* B_{10}.

Nous allons utiliser l'identité (1) en choisissant convenablement l'un des deux derniers bicarrés du second membre. Pour cela, notons que

$$2z + 1 = (z+1)^2 + (iz)^2 \quad \text{et} \quad 4z = (z+1)^2 + [i(z-1)]^2 .$$

Ainsi

$$8z + 2 = [2(1+i)z+1]^2 + [2(1-i)z+1]^2$$
$$= [[(1+i)z+1]^2 + [(1-i)z]^2]^2 + [[(1-i)z+1]^2 + [(1+i)z]^2]^2 .$$

En multipliant par 6 et en utilisant (1), on obtient:

$$48z + 12 = 4(2z+1)^4 + 2(2z+i)^4 + 2(2z-i)^4$$
$$+ [2(1+i)z+1]^4 + [2(1-i)z+1]^4 + 2 .$$

En remplaçant $2z$ par z on obtient:

$$24z + 10 = 4(z+1)^4 + 2(z+i)^4 + 2(z-i)^4$$
$$+ [(1+i)z+1]^4 + [(1-i)z+1]^4$$

ce qui est l'un des résultats annoncés.

En partant de $8z + 1 + 4i = (4z+2i+1)^2 + (4iz-2)^2$, on établit de la même façon que plus haut, l'identité suivante:

$$24z + 9 = (2z+1)^4 + 2(z+i)^4 + 2(z-i)^4 + [(1+i)z]^4$$
$$+ 2[z(1+i)+1]^4 + 2[z(1-i)+1]^4 .$$

Les deux autres résultats s'obtiennent d'une autre façon: on a tout d'abord l'identité:

$$(2) \qquad (x+3)^4 - 3(x+2)^4 + 3(x+1)^4 - x^4 = 24x + 36 .$$

Comme $-3 = (1+i)^4 + 1$ et $-1 = (1+i)^4 + 3$, on a

$$24x + 12 = (x+2)^4 + (x+1)^4 + 3x^4 + 3(x-1)^4$$
$$+ [(1+i)(x+1)]^4 + [(1+i)(x-1)]^4$$

qui est donc somme de 10 bicarrés.

Le dernier résultat provient d'une méthode mixte: on a $(x+1)^4 - 2x^4 + (x-1)^4 = 12x^2 + 2$; comme $-2 = (1+i)^4 + 2$, cela montre que $12x^2 + 2$ est B_5; de même pour $12(ix-i)^2 + 2$. Donc $12x^2 + 12(ix-i)^2 + 4 = 24x - 8$ est B_{10} ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarquons qu'on peut obtenir d'autres identités: ainsi

$$8z+1 = (4z+1)^2 + (4iz)^2$$
$$= [(2z+1)^2 + (2iz)]^2 + [(iz+1)^2 + (z+i)^2]^2 .$$

En utilisant (1), on voit que $48z + 6$ est B_{12}; mais comme $(2z+1) + i(2iz) = 1$ et $(iz+1) - i(z+i) = 2$, on voit que parmi ces 12 bicarrés, on a 1^4 et 2^4. On a donc $48z + 37 = B_{10}$ avec la formule:

$$48z - 11 = 2\left[2(1+i)z+1\right]^4 + \left[2(1-i)z+1\right]^4 + (4z+1)^4 + 2\left[(1+i)(z+1)\right]^4 + 2\left[(1+i)(z-1)\right]^4 + (2z)^4,$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer z par $(1+i)z$.

Une autre identité donne $48z + 4 = B_{10}$ à l'aide de $12x^2 + 2 = B_5$ et $12(ix-2i)^2 + 2 = B_{10}$.

Pour déduire le théorème 1 du lemme, il suffit de montrer qu'en ajoutant à $24z + 9$, 10, 12 ou 16, un ou deux bicarrés, on obtient toutes les suites $24z$, $24z+1, \ldots, 24z+23$. Pour cela, on utilise les congruences suivantes modulo 24: $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 9 \bmod 24$, $(1+i)^4 = 20 \bmod 24$, $\left[2(1+i)\right]^4 = 8 \bmod 24$, $\left[3(1+i)\right]^4 = 12 \bmod 24$, $(2+i)^4 = 17 \bmod 24$ et $(3+i)^4 = 4 \bmod 24$. Ces congruences permettent de vérifier que sauf pour $24z+7$, $+15$ et $+23$, tout entier de Gauss de la forme $24z + a$, $0 \leqslant a \leqslant 23$ est B_{11}; les trois restants sont donc bien B_{12} et le théorème est démontré.

2. Soit ρ une racine cubique primitive de l'unité, de sorte que $0 = \rho^2 + \rho + 1$. Si dans l'identité de Liouville, on fait $x_2 = x_3 = x_4$, on trouve l'identité:

$$2(X^2+XY+Y^2)^2 = X^4 + (X+Y)^4 + Y^4, \tag{3}$$

qui va permettre d'étudier les sommes de bicarrés dans $Z[\rho]$. En effet, on a l'identité:

$$u^2 + u(\rho u+v) + (\rho u+v)^2 = uv(1+2\rho) + v^2.$$

En prenant $v = 1 + 2\rho$, on trouve en changeant u en $u - 1$,

$$-3u = (u-1)^2 + (u-1)\left[\rho(u+1)+1\right] + \left[\rho(u+1)+1\right]^2.$$

On a donc d'après (3): $18u^2 \in B_3$; comme tout élément de $Z[\rho]$ est somme de 3 carrés, on en déduit que tout multiple de 18 est B_9. De la même façon, en prenant $v = 1$, plus haut, on voit que $2\left[u(1+2\rho)+1\right]^2 = B_3$, ce qui donne

$$12(1+2\rho)u = 2\left[u(1+2\rho)+1\right]^2 + 2\left[u\rho(1+2\rho)+\rho^2\right]^2 + 2\left[u\rho^2(1+2\rho)+\rho\right]^2 = B_9;$$

on a donc montré:

LEMME. *Tout multiple de* 18 *ou de* $12(1+2\rho)$ *dans* $\mathbf{Z}[\rho]$ *est* B_9.

Cela va nous permettre de démontrer le:

THÉOREME 2. *Tout élément de* $\mathbf{Z}[\rho]$ *est somme d'au plus 12 bicarrés.*

Il s'agit d'après le lemme ci-dessus de montrer que si $z \in \mathbf{Z}[\rho]$, l'équation diophantienne $z = X^4 + Y^4 + Z^4 + 18\,T$ a une solution (X, Y, Z, T) dans $\mathbf{Z}[\rho]$; pour cela, il suffit de montrer que tout élément de $\mathbf{Z}[\rho]/(18)$ est somme d'au plus 3 bicarrés. L'anneau $\mathbf{Z}[\rho]/(18)$ est produit direct de F_4 et de $A = \mathbf{Z}[x]/(9, x^2+3)$ car $(9) = (1+2\rho)^4$: dans $\mathbf{F}_4$, tout élément est une puissance 4ème et dans A, les bicarrés sont les éléments congrus à 1 modulo x (d'après le lemme de Hensel) de sorte que 3 suffisent pour exprimer tout élément de A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARDY, G. and E. WRIGHT. *An introduction to the Theory of Numbers.* Clarendon Press, Oxford (1945), § 27-28.

[2] MORDELL, L. *Diophantine Equations.* Academic Press, London and New York (1969), § 21.

[3] NIVEN, I. Sums of fourth powers of Gaussian integers. *Bull. Amer. Math. Soc. 47* (1941), pp. 923-926.

(Reçu le 21 décembre 1978)

Philippe Revoy

Institut de Mathématiques
Place Eugène-Bataillon
F-34060 Montpellier