Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SOMMES DE BICARRÉS DANS $Z[\sqrt{-1}]$ ET $Z[\sqrt[3]{1}]$

Autor: Revoy, Ph.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50381

SOMMES DE BICARRÉS DANS $\mathbf{Z}[\sqrt{-1}]$ ET $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{1}]$

par Ph. Revoy

La résolution du problème de Waring pour N est fondée sur des identités algébriques, dont la première est celle de Liouville pour les bicarrés: $6\,(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)^2 = \sum_{1 \leqq i < j \leqq 4} [(a_i+a_j)^4 + (a_i-a_j)^4]$. De même, à la base des études sur le problème « facile » de Waring se trouvent toujours des identités algébriques ([1], [2]).

Nous montrons ici à l'aide de diverses identités que dans $Z[i]$ et dans $\mathbf{Z}[\rho]$ où $\rho^2 + \rho + 1 = 0$ tout entier qui est somme de bicarrés est somme d'au plus 12 bicarrés. Nous dirons qu'un élément a d'un anneau est B_n s'il est somme de n bicarrés d'éléments de l'anneau.

1. Dans [3], I. Niven montre que tout entier de Gauss de la forme $a + 24\,bi$, $a, b \in \mathbf{Z}$ est somme d'au plus 18 bicarrés et que tout entier de Gauss qui est B_n a sa partie imaginaire divisible par 24. Ici, nous allons établir:

Théoreme 1. *Tout entier de Gauss de la forme* $a + 24\,bi$ *est somme d'au plus* 12 *bicarrés.*

La divisibilité par 24 de la partie imaginaire provient de ce que $\mathrm{Im}\,(x+iy)^4 = 4xy\,(x^2-y^2)$: si $xy \neq 0\,(2)$, $x^2 - y^2 = 0\,(2)$ et si $xy \neq 0\,(3)$, $x^2 = y^2 = 1\,(3)$. Dans [3], I. Niven montre que tout entier de Gauss de la forme $48z + 12$ ou de la forme $48z + 24i + 36$ est B_{12} à l'aide de l'identité:

$$6\,(X^2+Y^2)^2 = 2\,(X+Y)^4 + 2\,(X-Y)^4 + (X+iY)^4 + (X-iY)^4 \,. \tag{1}$$

En fait, on peut montrer le

Lemme. *Tout entier de Gauss de la forme* $24z + a$ *avec* $a = 9, 10, 12$ *ou* 16 *est* B_{10}.

Nous allons utiliser l'identité (1) en choisissant convenablement l'un des deux derniers bicarrés du second membre. Pour cela, notons que

$$2z + 1 = (z+1)^2 + (iz)^2 \quad \text{et} \quad 4z = (z+1)^2 + [i(z-1)]^2 .$$

Ainsi

$$8z + 2 = [2(1+i)z+1]^2 + [2(1-i)z+1]^2$$
$$= [[(1+i)z+1]^2 + [(1-i)z]^2]^2 + [[(1-i)z+1]^2 + [(1+i)z]^2]^2 .$$

En multipliant par 6 et en utilisant (1), on obtient:

$$48z + 12 = 4(2z+1)^4 + 2(2z+i)^4 + 2(2z-i)^4$$
$$+ [2(1+i)z+1]^4 + [2(1-i)z+1]^4 + 2 .$$

En remplaçant $2z$ par z on obtient:

$$24z + 10 = 4(z+1)^4 + 2(z+i)^4 + 2(z-i)^4$$
$$+ [(1+i)z+1]^4 + [(1-i)z+1]^4$$

ce qui est l'un des résultats annoncés.

En partant de $8z + 1 + 4i = (4z+2i+1)^2 + (4iz-2)^2$, on établit de la même façon que plus haut, l'identité suivante:

$$24z + 9 = (2z+1)^4 + 2(z+i)^4 + 2(z-i)^4 + [(1+i)z]^4$$
$$+ 2[z(1+i)+1]^4 + 2[z(1-i)+1]^4 .$$

Les deux autres résultats s'obtiennent d'une autre façon: on a tout d'abord l'identité:

$$(x+3)^4 - 3(x+2)^4 + 3(x+1)^4 - x^4 = 24x + 36 . \tag{2}$$

Comme $-3 = (1+i)^4 + 1$ et $-1 = (1+i)^4 + 3$, on a

$$24x + 12 = (x+2)^4 + (x+1)^4 + 3x^4 + 3(x-1)^4$$
$$+ [(1+i)(x+1)]^4 + [(1+i)(x-1)]^4$$

qui est donc somme de 10 bicarrés.

Le dernier résultat provient d'une méthode mixte: on a $(x+1)^4 - 2x^4 + (x-1)^4 = 12x^2 + 2$; comme $-2 = (1+i)^4 + 2$, cela montre que $12x^2 + 2$ est B_5; de même pour $12(ix-i)^2 + 2$. Donc $12x^2 + 12(ix-i)^2 + 4 = 24x - 8$ est B_{10} ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarquons qu'on peut obtenir d'autres identités: ainsi

$$8z+1 = (4z+1)^2 + (4iz)^2$$
$$= [(2z+1)^2 + (2iz)]^2 + [(iz+1)^2 + (z+i)^2]^2 .$$

En utilisant (1), on voit que $48z + 6$ est B_{12}; mais comme $(2z+1) + i(2iz) = 1$ et $(iz+1) - i(z+i) = 2$, on voit que parmi ces 12 bicarrés, on a 1^4 et 2^4. On a donc $48z + 37 = B_{10}$ avec la formule:

$$48z - 11 = 2\left[2(1+i)z+1\right]^4 + \left[2(1-i)z+1\right]^4 + (4z+1)^4 + 2\left[(1+i)(z+1)\right]^4 + 2\left[(1+i)(z-1)\right]^4 + (2z)^4,$$

où l'on peut d'ailleurs remplacer z par $(1+i)z$.

Une autre identité donne $48z + 4 = B_{10}$ à l'aide de $12x^2 + 2 = B_5$ et $12(ix-2i)^2 + 2 = B_{10}$.

Pour déduire le théorème 1 du lemme, il suffit de montrer qu'en ajoutant à $24z + 9$, 10, 12 ou 16, un ou deux bicarrés, on obtient toutes les suites $24z$, $24z+1, \ldots, 24z+23$. Pour cela, on utilise les congruences suivantes modulo 24: $1^4 = 1$, $2^4 = 16$, $3^4 = 9 \bmod 24$, $(1+i)^4 = 20 \bmod 24$, $[2(1+i)]^4 = 8 \bmod 24$, $[3(1+i)]^4 = 12 \bmod 24$, $(2+i)^4 = 17 \bmod 24$ et $(3+i)^4 = 4 \bmod 24$. Ces congruences permettent de vérifier que sauf pour $24z+7$, $+15$ et $+23$, tout entier de Gauss de la forme $24z + a$, $0 \leqslant a \leqslant 23$ est B_{11}; les trois restants sont donc bien B_{12} et le théorème est démontré.

2. Soit ρ une racine cubique primitive de l'unité, de sorte que $0 = \rho^2 + \rho + 1$. Si dans l'identité de Liouville, on fait $x_2 = x_3 = x_4$, on trouve l'identité:

$$2(X^2+XY+Y^2)^2 = X^4 + (X+Y)^4 + Y^4, \tag{3}$$

qui va permettre d'étudier les sommes de bicarrés dans $Z[\rho]$. En effet, on a l'identité:

$$u^2 + u(\rho u+v) + (\rho u+v)^2 = uv(1+2\rho) + v^2.$$

En prenant $v = 1 + 2\rho$, on trouve en changeant u en $u - 1$,

$$-3u = (u-1)^2 + (u-1)\left[\rho(u+1)+1\right] + \left[\rho(u+1)+1\right]^2.$$

On a donc d'après (3): $18u^2 \in B_3$; comme tout élément de $Z[\rho]$ est somme de 3 carrés, on en déduit que tout multiple de 18 est B_9. De la même façon, en prenant $v = 1$, plus haut, on voit que $2\left[u(1+2\rho)+1\right]^2 = B_3$, ce qui donne

$$12(1+2\rho)u = 2\left[u(1+2\rho)+1\right]^2 + 2\left[u\rho(1+2\rho)+\rho^2\right]^2 + 2\left[u\rho^2(1+2\rho)+\rho\right]^2 = B_9;$$

on a donc montré:

LEMME. *Tout multiple de* 18 *ou de* $12(1+2\rho)$ *dans* $\mathbf{Z}[\rho]$ *est* B_9.

Cela va nous permettre de démontrer le:

THÉOREME 2. *Tout élément de* $\mathbf{Z}[\rho]$ *est somme d'au plus 12 bicarrés.*

Il s'agit d'après le lemme ci-dessus de montrer que si $z \in \mathbf{Z}[\rho]$, l'équation diophantienne $z = X^4 + Y^4 + Z^4 + 18T$ a une solution (X, Y, Z, T) dans $\mathbf{Z}[\rho]$; pour cela, il suffit de montrer que tout élément de $\mathbf{Z}[\rho]/(18)$ est somme d'au plus 3 bicarrés. L'anneau $\mathbf{Z}[\rho]/(18)$ est produit direct de F_4 et de $A = \mathbf{Z}[x]/(9, x^2+3)$ car $(9) = (1+2\rho)^4$: dans $\mathbf{F}_4$, tout élément est une puissance 4ème et dans A, les bicarrés sont les éléments congrus à 1 modulo x (d'après le lemme de Hensel) de sorte que 3 suffisent pour exprimer tout élément de A.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HARDY, G. and E. WRIGHT. *An introduction to the Theory of Numbers.* Clarendon Press, Oxford (1945), § 27-28.

[2] MORDELL, L. *Diophantine Equations.* Academic Press, London and New York (1969), § 21.

[3] NIVEN, I. Sums of fourth powers of Gaussian integers. *Bull. Amer. Math. Soc. 47* (1941), pp. 923-926.

(Reçu le 21 décembre 1978)

Philippe Revoy

Institut de Mathématiques
Place Eugène-Bataillon
F-34060 Montpellier