Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

Autor: Weber, Claude

Kapitel: 3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50382

$$
\begin{array}{cc}
m \text{ colonnes} & n \text{ colonnes} \\
\left[\begin{array}{cccc|ccc}
a_n & & & & & & \\
a_{n-1} & a_n & & & & 0 & \\
\vdots & \vdots & \ddots & & & & \\
 & & & a_n & & & \\
\hline
\vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
a_0 & \vdots & & & \Phi(f^{n-1}\bar{g}) & \cdots & \Phi(\bar{g}) \\
 & a_0 & & & & & \\
 & & & a_0 & \vdots & & \vdots
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Dans la matrice précédente, $\Phi(f^j\bar{g})$ désigne un vecteur colonne dans la base $(e_{n-1}, e_{n-2}, \ldots, e_0)$.

Comme $|a_n| = 1$, le groupe ainsi présenté est isomorphe à $\mathscr{M}/\mathscr{N}$.

Le déterminant de cette dernière matrice est égal, en valeur absolue, d'une part à l'ordre du groupe $\mathscr{M}/\mathscr{N}$ et d'autre part, par construction, à Rés (f, g). C.q.f.d.

3. Revêtements cycliques de S^3, ramifiés sur un nœud

Soit K un nœud apprivoisé dans S^3. Désignons par X le complémentaire du nœud $S^3 - K$, par X_∞ le revêtement cyclique infini de X, par X_m le revêtement cyclique à m feuilles de X, par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur K.

Considérons K et S^3 comme orientés. Alors, via des conventions fixées une fois pour toutes, on obtient un générateur t du groupe de Galois du revêtement $X_\infty \to X$.

Les « groupes » d'homologie $H_1(X_\infty, R)$, $H_1(\hat{X}_m, R)$ et $H_1(X_m, R)$ sont alors munis d'une structure de RT-modules, t agissant via Galois.

Les faits suivants sont bien connus. Pour une démonstration, voir [4].

(i) $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}T$-module de type fini. (C'est essentiellement une conséquence du fait que $\mathbf{Z}T$ est nœthérien.)

(ii) $H_1(\hat{X}_m; R) \approx \operatorname{Coker}\{1 - t^m : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty, R)\}$.
(C'est une conséquence de la « suite exacte de Milnor »).
Si l'on fait $m = 1$ dans la dernière égalité et si l'on utilise le fait que RT est nœthérien, on obtient que $1 - t : H_1(X_\infty, R) \to H_1(X_\infty; R)$ est un isomorphisme pour tout R nœthérien.

(iii) $H_1(X_\infty, \mathbf{Q})$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}$.
(Conséquence facile du dernier argument par $R = \mathbf{Q}$.)
Le résultat suivant est dû à R. H. Crowell [1].

(iv) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module admettant une présentation carrée (c'est-à-dire: nombre de générateurs égal au nombre de relations). Soit $\Delta \in \mathbf{Z}T$ le déterminant de cette présentation. (Δ est le générateur du premier idéal élémentaire de A.) Alors A est sans $\mathbf{Z}$-torsion si et seulement si Δ est « primitif » (c'est-à-dire si ses coefficients sont premiers entre eux).
Il est classique que $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ satisfait les hypothèses du théorème de Crowell.
Le dernier fait dont nous aurons besoin est dû à M. Kervaire [5]:

(v) Soit A un $\mathbf{Z}T$-module de type fini et tel que la multiplication par $(1-t)$ soit un isomorphisme, alors le sous-groupe de $\mathbf{Z}$-torsion de A est fini.

4. La formule de R. H. Fox

Conformément à nos conventions du paragraphe précédent, désignons par $\hat{X}_m$ le revêtement cyclique à m feuilles de S^3, ramifié sur nœud de polynôme d'Alexander Δ. *La formule de Fox* s'énonce ainsi:

$H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est fini si et seulement si $\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta) \neq 0$. En ce cas l'ordre du groupe $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ est égal à $|\operatorname{Rés}(1-t^m, \Delta)|$.