Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

Autor: Weber, Claude

Kapitel: 5. Exemples et commentaires

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50382

5. Exemples et commentaires

A. La première mention du fait que $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas nécessairement somme directe de $\mathbf{Z}T$-modules cycliques se trouve (à ma connaissance) dans une note de l'article de J. Milnor [6]. Voici une façon très simple de construire de tels nœuds.

Affirmation : Soit $K \subset S^3$ un nœud dont le polynôme d'Alexander est irréductible (sur $\mathbf{Q}$) et pour lequel $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ n'est pas un groupe cyclique. Alors $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas somme de modules cycliques.

En effet, l'irréductibilité du polynôme d'Alexander entraîne que, si $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ était somme de modules cycliques, il serait en fait cyclique. Comme une présentation du groupe $H_1(\hat{X}_2; \mathbf{Z})$ est obtenue en remplaçant t par -1 dans une présentation du module $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ (appliquer le § 3, (ii), pour $m = 2$ et le fait que $(1-t)$ est un isomorphisme), on déduirait que $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ serait cyclique. Contradiction.

Bien sûr, l'argument est susceptible de multiples généralisations. Mais il a l'avantage de permettre l'usage des tables! C'est ainsi qu'on découvre que le nœud 9_{35} satisfait les conditions de l'affirmation (cf. livre de Reidemeister).

En fait, il est facile de voir que 9_{35} est le nœud de pretzel (3, 3, 3). En appliquant la méthode classique pour obtenir une matrice de Seifert des nœuds de pretzel (cf., par exemple, H. Trotter [9]) on obtient la matrice de présentation suivante pour le module $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 3(1-t) & 2t-1 \\ t-2 & 3(1-t) \end{pmatrix} .$$

D'où le polynôme d'Alexander $\Delta = 7t^2 - 13t + 7$ (irréductible sur R) et $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/_3 \oplus \mathbf{Z}/_9$.

Naturellement, on peut construire d'autres nœuds de pretzel sur le même principe.

B. L'argument basé sur la suite Ker-Coker (et a fortiori la formule de Fox) montrent que le choix de la décomposition en somme de modules cycliques sur $\mathbf{Q}T$ n'intervient pas pour calculer l'ordre de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsqu'il est fini.

Il est bien connu que, en revanche, le groupe lui-même dépend de la décomposition. L'exemple classique consiste en les nœuds 6_1 et 9_{46} (et $m=2$).

C. Il faut prendre garde au fait que la formule de Fox ne donne pas l'ordre de la $\mathbf{Z}$-torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsque ce groupe n'est pas fini, contrairement à ce que la formulation utilisée par L. P. Neuwirth [7] laisse croire. En fait, comme nous l'avons vu, Rés $(1-t^m, \Delta)$ est nul dans le cas où $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ n'est pas fini.

L'exemple suivant montre que la détermination de l'ordre de la torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$, lorsque ce groupe n'est pas fini est une question plus difficile.

Soient $P(t) = 1 - t + t^2$, $Q(t) = 6t^2 - 11t + 6$, $A_1 = \mathbf{Z}T \Big/ P(t) \oplus \mathbf{Z}T \Big/ Q(t)$

$$A_2 = \mathbf{Z}T \Big/ P(t) \,.\, Q(t) \,.$$

D'après les résultats classiques de H. Seifert, A_1 et A_2 peuvent être réalisés comme $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ de nœuds dans S^3.

Il n'est pas très difficile de voir que

$$A_1 \Big/ (1-t)^6 A_1 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \text{ un 5-groupe de rang 2,}$$

$$A_2 \Big/ (1-t^6)\, A_2 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \,.$$

La raison essentielle de ces comportements est que $P(t) = Q(t)$ sur le corps F_5.

Cet exemple montre, en particulier, que cette fois-ci, le choix de la décomposition sur QT n'est pas innocent.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Crowell, R. H. The group G'/G'' of a knot group G. *Duke Math. Jour. 30* (1963), pp. 349-354.

[2] Fox, R. H. Free differential calculus. III Subgroups. *Annals of Math. 59* (1954), pp. 196-210.

[3] —— A quick trip through knot theory. *Topology of 3-manifolds (ed. M. K. Fort Jr.).* Prentice Hall (1962), pp. 120-167.