

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR UNE FORMULE DE R. H. FOX CONCERNANT L'HOMOLOGIE
DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES
Autor: Weber, Claude
Kapitel: 5. Exemples et commentaires
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-50382>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 06.02.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

5. EXEMPLES ET COMMENTAIRES

A. La première mention du fait que $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas nécessairement somme directe de $\mathbf{Z}T$ -modules cycliques se trouve (à ma connaissance) dans une note de l'article de J. Milnor [6]. Voici une façon très simple de construire de tels nœuds.

Affirmation : Soit $K \subset S^3$ un nœud dont le polynôme d'Alexander est irréductible (sur \mathbf{Q}) et pour lequel $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ n'est pas un groupe cyclique. Alors $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ n'est pas somme de modules cycliques.

En effet, l'irréductibilité du polynôme d'Alexander entraîne que, si $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ était somme de modules cycliques, il serait en fait cyclique. Comme une présentation du groupe $H_1(\hat{X}_2; \mathbf{Z})$ est obtenue en remplaçant t par -1 dans une présentation du module $H_1(X_\infty; \mathbf{Z})$ (appliquer le § 3, (ii), pour $m = 2$ et le fait que $(1-t)$ est un isomorphisme), on déduirait que $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z})$ serait cyclique. Contradiction.

Bien sûr, l'argument est susceptible de multiples généralisations. Mais il a l'avantage de permettre l'usage des tables! C'est ainsi qu'on découvre que le nœud 9_{35} satisfait les conditions de l'affirmation (cf. livre de Reidemeister).

En fait, il est facile de voir que 9_{35} est le nœud de pretzel $(3, 3, 3)$. En appliquant la méthode classique pour obtenir une matrice de Seifert des nœuds de pretzel (cf., par exemple, H. Trotter [9]) on obtient la matrice de présentation suivante pour le module $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$:

$$\begin{pmatrix} 3(1-t) & 2t-1 \\ t-2 & 3(1-t) \end{pmatrix} .$$

D'où le polynôme d'Alexander $\Delta = 7t^2 - 13t + 7$ (irréductible sur R) et $H_1(\hat{X}_2, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/3 \oplus \mathbf{Z}/9$.

Naturellement, on peut construire d'autres nœuds de pretzel sur le même principe.

B. L'argument basé sur la suite Ker-Coker (et a fortiori la formule de Fox) montrent que le choix de la décomposition en somme de modules cycliques sur $\mathbf{Q}T$ n'intervient pas pour calculer l'ordre de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsqu'il est fini.

Il est bien connu que, en revanche, le groupe lui-même dépend de la décomposition. L'exemple classique consiste en les nœuds 6_1 et 9_{46} (et $m=2$).

C. Il faut prendre garde au fait que la formule de Fox ne donne pas l'ordre de la \mathbf{Z} -torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ lorsque ce groupe n'est pas fini, contrairement à ce que la formulation utilisée par L. P. Neuwirth [7] laisse croire. En fait, comme nous l'avons vu, $\text{Rés}(1-t^m, \Delta)$ est nul dans le cas où $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$ n'est pas fini.

L'exemple suivant montre que la détermination de l'ordre de la torsion de $H_1(\hat{X}_m; \mathbf{Z})$, lorsque ce groupe n'est pas fini est une question plus difficile.

$$\text{Soient } P(t) = 1 - t + t^2, \quad Q(t) = 6t^2 - 11t + 6, \quad A_1 = \mathbf{Z}T \Big/ P(t) \oplus \mathbf{Z}T \Big/ Q(t)$$

$$A_2 = \mathbf{Z}T \Big/ P(t) \cdot Q(t).$$

D'après les résultats classiques de H. Seifert, A_1 et A_2 peuvent être réalisés comme $H_1(X_\infty, \mathbf{Z})$ de nœuds dans S^3 .

Il n'est pas très difficile de voir que

$$A_1 \Big/ (1-t)^6 A_1 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \oplus \text{un 5-groupe de rang 2,}$$

$$A_2 \Big/ (1-t^6) A_2 \approx \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}.$$

La raison essentielle de ces comportements est que $P(t) = Q(t)$ sur le corps F_5 .

Cet exemple montre, en particulier, que cette fois-ci, le choix de la décomposition sur QT n'est pas innocent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] CROWELL, R. H. The group G'/G'' of a knot group G . *Duke Math. Jour.* 30 (1963), pp. 349-354.
- [2] FOX, R. H. Free differential calculus. III Subgroups. *Annals of Math.* 59 (1954), pp. 196-210.
- [3] ——— A quick trip through knot theory. *Topology of 3-manifolds* (ed. M. K. Fort Jr.). Prentice Hall (1962), pp. 120-167.