Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: HALBGRUPPEN UND RESOLVENTEN IN DER POTENTIALTHEORIE

Autor: Bauer, Heinz

Kapitel: 6. Ausblick: Resolventen in der potentialtheorie

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50369

Dabei bezeichnet 1_A die Indikatorfunktion einer Menge A; die linke Seite der Ungleichung (31) ist das Lebesgue-Maß der Menge

$$\{y \in \mathbf{R}: D^* u(y) \geqslant \alpha\} \cap [x, +\infty[.$$

„Fast überall" heißt stets bis auf eine Borel-Menge A vom Lebesgue-Maß Null. Hiermit äquivalent ist aber die Forderung

$$V 1_A(x) = 0 \qquad \textit{für alle } x \in \mathbf{R}. \tag{32}$$

Interpretiert man in den Aussagen 1 und 2 fast überall im Sinne von (32), so bekommen die Aussagen 1—3 einen Sinn für beliebige Halbgruppen $(P_t)_{t>0}$ von Kernen auf einem Meßraum.

Es ist höchst bemerkenswert, daß die Aussagen 1—3 nahezu ohne Zusatzbedingungen für *sub-Markovsche* Halbgruppen $(P_t)_{t>0}$ auf einem Meßraum von Mokobodzki [25], [26] bewiesen werden konnten. Man muß eigentlich nur voraussetzen, daß die σ-Algebra des Meßraumes von den exzessiven Funktionen der Halbgruppe erzeugt wird. Dies ist in unserem eingangs gewählten Beispiel der Fall.

6. Ausblick: Resolventen in der Potentialtheorie

Häufig — ein typisches Beispiel hierfür ist der Beweis des Satzes 2.1 — gelangt man zu einer Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen nur auf dem Umweg über deren *Resolvente* $(V_\lambda)_{\lambda>0}$, wobei V_λ den Kern,

$$V_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt, \tag{33}$$

also die Laplace-Transformierte von $(P_t)_{t>0}$ bezeichnet. Es ist der Satz von Hille-Yosida, der von einer Resolvente, d.h. genauer von einer der Resolventengleichung

$$V_\lambda - V_\mu + (\lambda - \mu) V_\lambda V_\mu = 0 \qquad (\lambda, \mu > 0) \tag{34}$$

genügenden Familie $(V_\lambda)_{\lambda>0}$ von Kernen zu einer zugehörigen, unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen eindeutig bestimmten Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ von Kernen führt. (Vgl. Meyer [24].)

Außerdem ist es selbst bei gegebener Halbgruppe $(P_t)_{t>0}$ oft nur auf dem Umweg über die Resolvente möglich, gewisse Eigenschaften nachzuweisen. Ist beispielsweise $(P_t)_{t>0}$ eine Fellersche Halbgruppe auf einem lokal-kompakten Raum X mit abzählbarer Basis, so läßt sich die Exzessivität einer Borel-meßbaren Funktion $u \geqslant 0$ auf X durch die zur Definition äquivalente Bedingung

(35) $$\sup_{\lambda > 0} \lambda V_\lambda u = u$$

für die Resolvente nachweisen.

Dies hat zur Folge, daß der explizite Gebrauch der Halbgruppe oft unnötig und Sätze gleich in der Sprache der Resolventen formuliert und bewiesen werden können. Häufig wird hierdurch größere Allgemeinheit erzielt, nämlich dann, wenn keine zugehörige Halbgruppe existiert. Ein Beispiel sind die Sätze von MOKOBODZKI des letzten Abschnitts, welche in [25], [26] gleich in der Sprache der Resolventen formuliert werden. Auch die Untersuchungen von CORNEA-LICEA [14] sind in diesem Licht zu sehen.

Resolventen treten auch bei *hyperbolischen* linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung auf — allerdings muß man dabei auf die Positivität der Kerne verzichten. RITTER [27] (vgl. auch [16]) hat nämlich gezeigt, daß für große Klassen solcher Differentialgleichungen der durch die Fundamentallösung definierte Kern in eine Resolvente reeller Kerne aufgelöst werden kann. Hierdurch dürfte es möglich werden, potentialtheoretische Methoden auch in das Gebiet der hyperbolischen Differentialgleichungen eindringen zu lassen. Das Gebiet der parabolischen Differentialgleichungen wurde potentialtheoretischen Methoden bereits durch den allgemeinen Begriff des harmonischen Raumes erschlossen (vgl. [1] und [13]).

LITERATUR

[1] BAUER, H. *Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie*. Lecture Notes in Math. 22, Springer-Verlag (1966).

[2] —— Aspects of modern potential theory. *Proc. Intern. Congress of Math., Vancouver 1974*, pp. 327-337 (1975).

[3] —— *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Masstheorie. 3. Aufl.* Verlag W. de Gruyter, Berlin (1978).

[4] BENDIKOV, A. D. On functions that are harmonic for a certain class of diffusion processes on a group. *Theory Probability Appl. 20* (4), pp. 759-769 (1975).

[5] BERG, C. Potential theory on the infinite dimensional torus. *Inventiones math. 32* (1976), pp. 49-100.

[6] —— On Brownian and Poissonian convolution semigroups on the infinite dimensional torus. *Inventiones math. 38* (1977), pp. 227-235.

[7] BERG, C. and G. FORST. *Potential theory on locally compact abelian groups*. Ergebnisse der Math. 87, Springer-Verlag (1975).

[8] BLIEDTNER, J. Harmonische Gruppen und Huntsche Faltungskerne (in Seminar über Potentialtheorie). *Lecture Notes in Math. 69*, p.p. 69-102, Springer-Verlag (1968).