Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 25 (1979)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: L'ÉQUATION DIOPHANTIENNE x(x+1) = ky(y+1)

Autor: Barry, Abou-Dardaye

Kapitel: III. Applications numériques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-50370

III. Applications numériques

Le calcul effectif des solutions entières de (1) présente peu d'intérêt, quel que soit k donné. On observera, cependant, que pour $k = 2$ et $k = 3$, par exemple, une seule équation (2) fournit toutes les solutions de (1), alors qu'il en faut deux pour $k = 5$. Ce qui pose la question du nombre d'équations (2) nécessaire pour résoudre complètement (1), lorsque k n'est pas un carré.

D'autre part, pour $k = k'^2$, on peut trouver des paramétrisations des solutions de (1), analogues à celle que nous avons rappelée dans l'*Introduction*, à savoir

$$(27) \qquad k' = (4h+1)(4h+3)\,,\quad x = h(4h+3)(2h+1)^2\,,\quad y = h\,,$$

et

$$(28) \qquad k' = 4(2h+1)(8h^2+8h+1)\,, x = 16h(h+1)^2\,,\quad y = h\,.$$

Pour montrer (27), il suffit de poser dans (21)

$$(29) \qquad \alpha = \alpha'^2\,,\quad \beta = (\alpha'+2)^2\,,\quad b_0 = h\,,\quad a_0 = h+1\,,$$

et il vient $\alpha' = 4h + 1$. Nous déduisons alors (27) de (14), (29), (26) et (25).

D'autre part, en posant dans (21),

$$(30) \qquad \alpha = (2\alpha'+1)^2\,,\quad \beta = (4\beta')^2\,,\quad a_0 = 1\,,\quad b_0 = h(h+1)\,,$$

il vient

$$(31) \qquad \alpha'(\alpha'+1) = (2\beta')^2\, h(h+1)\,.$$

Or, d'après l'*Introduction*, (31) peut être résolue par

$$(32) \qquad \alpha' = 4h(h+1)\,,\quad \beta' = 2h+1\,.$$

Les formules (28) résultent alors de (14), (30), (32), (26) et (25).

La méthode que nous venons d'exposer s'applique évidemment à tout k' congru à zéro modulo un entier quelconque. Elle peut aussi servir à résoudre (1), lorsque k n'est pas un carré.

Nous avons également noté qu'il nous suffisait d'une seule équation de Pell-Fermat, pour décrire entièrement les solutions de (1), lorsqu'en particulier $k = 2$. Il en a fallu deux à Thouvenot [6]. Mais, que l'on emprunte une voie ou une autre, l'essentiel est bien d'arriver à Rome, ou à ... Conakry!