

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES A LA LOI NORMALE  
**Autor:** Fuchs, Aimé / Letta, Giorgio  
**Kapitel:** 2. Une généralisation de l'équation fonctionnelle du §1.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50371>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## 2. UNE GÉNÉRALISATION DE L'ÉQUATION FONCTIONNELLE DU § 1.

Si l'on regarde attentivement la démonstration du Théorème (1.5) de Maxwell, on s'aperçoit que, en ce qui concerne l'implication (b)  $\Rightarrow$  (a), on n'a exploité l'hypothèse d'invariance par rotation que pour des rotations bien particulières, à savoir :

- (a) des rotations dont la matrice admet comme lignes des vecteurs de la base canonique, éventuellement multipliés par  $-1$ ;
- (b) des rotations dont la matrice admet comme première ligne le vecteur  $(1/\sqrt{n}, \dots, 1/\sqrt{n})$ .

Les rotations du type (a) nous servaient en effet à démontrer préalablement l'égalité des lois des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ . Une seule rotation du type (b) suffisait ensuite à démontrer la nature gaussienne de la loi commune.

Dans le cas du plan, en se plaçant d'emblée dans l'hypothèse de l'égalité des lois, on peut même énoncer le résultat suivant, faisant intervenir une seule rotation.

(2.1) THÉORÈME. Soit  $(X, Y)$  un vecteur aléatoire, à valeurs dans  $\mathbf{R}^2$ , dont les composantes sont indépendantes et de même loi  $\mu$ . Désignons par  $(X', Y')$  le vecteur aléatoire

$$((X - Y)/\sqrt{2}, (X + Y)/\sqrt{2})$$

(transformé de  $(X, Y)$  par une rotation de  $\pi/4$  autour de l'origine). Si l'une des composantes de  $(X', Y')$  suit la loi  $\mu$ , alors  $\mu$  est normale et centrée. <sup>1)</sup>

*Démonstration.* Supposons d'abord que la composante  $Y' = (X + Y)/\sqrt{2}$  suit la loi  $\mu$ ; le résultat est alors une conséquence du Corollaire (1.4) pour  $n = 2$ .

Supposons ensuite que la composante  $X' = (X - Y)/\sqrt{2}$  suit la loi  $\mu$ . On voit alors que  $\mu$  est une loi symétrique; donc  $-Y$  suit la même loi que  $Y$ , et l'on est ramené au cas précédent.

De façon plus générale, on peut se poser le problème suivant:

<sup>1)</sup> Il en résulte accessoirement que l'autre composante suit également la loi  $\mu$  et que les deux composantes sont indépendantes.

Soit  $X$  un vecteur aléatoire, à valeurs dans  $\mathbf{R}^n$  (avec  $n > 1$ ), dont les composantes sont indépendantes et de même loi  $\mu$ . Considérons le transformé  $Y$  de  $X$  par une rotation autour de l'origine, dont on désignera par  $A = (a_{ij})$  la matrice. Supposons que cette rotation ne soit pas du type (a) ci-dessus, c'est-à-dire qu'il existe un indice  $i$  tel que chacun des éléments  $a_{i1}, \dots, a_{in}$  de la  $i$ -ème ligne de  $A$  soit différent de 1 et de  $-1$ . Si, pour un tel indice  $i$ , la  $i$ -ème composante de  $Y$ , c'est-à-dire la variable aléatoire

$$Y_i = a_{i1}X_1 + \dots + a_{in}X_n,$$

suit la loi  $\mu$ , peut-on affirmer que  $\mu$  est normale et centrée?

En faisant intervenir la fonction caractéristique  $\varphi$  de la loi  $\mu$ , le problème peut être reformulé ainsi:

Soit  $(a_1, \dots, a_n)$  un système de  $n$  nombres réels satisfaisant aux conditions

$$a_1^2 + \dots + a_n^2 = 1, \quad |a_i| < 1 \text{ pour tout } i.$$

Si  $\varphi$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$(2.1) \quad \varphi(t) = \varphi(a_1 t) \dots \varphi(a_n t),$$

peut-on affirmer que  $\mu$  est normale et centrée?

La réponse est évidemment affirmative dans le cas particulier où les  $a_i$  sont égaux, car l'équation fonctionnelle (2.1) se réduit alors à l'équation fonctionnelle  $\varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{n}))^n$  déjà étudiée au paragraphe précédent. Dans le cas général, la réponse est encore affirmative, mais elle exige une démonstration beaucoup plus délicate, fondée sur la théorie des lois limites de Kolmogorov: cf. [5], Théor. 7.2.1, pag. 161, où le problème est généralisé au cas d'une suite infinie de variables aléatoires (indépendantes et de même loi). <sup>1)</sup>

### 3. L'ÉQUATION FONCTIONNELLE $(\varphi(t))^2 = \varphi(t+u)\varphi(t-u)\theta(u)$ .

Le théorème qui suit est une conséquence immédiate de (1.2). Il nous servira à démontrer de façon très simple le théorème de Bernstein-Darmois.

(3.1) THÉORÈME. Soient  $\mu$  une loi de probabilité sur  $\mathbf{R}$ ,  $\varphi$  sa fonction caractéristique. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

<sup>1)</sup> A signaler que l'énoncé du théorème de [5] cité ci-dessus est incorrect: en effet, il est faux si l'on prend  $a_1 = \alpha$  et  $a_i = 0$  pour tout  $i \geq 2$ . Pour le rendre correct, il suffit d'ajouter l'hypothèse:  $|a_i| < |\alpha|$  pour tout  $i$ .