

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES LIÉES A LA LOI NORMALE  
**Autor:** Fuchs, Aimé / Letta, Giorgio  
**Kapitel:** 6. Retour sur les équations fonctionnelles des paragraphes précédents  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50371>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

par  $Ls = te_1$  (un tel vecteur existe puisque la matrice de  $L$  est régulière). On obtient

$$\Phi(te_1)\Phi(te_1 + u(a_1 - a_2)) = \Phi(te_1 + ua_1)\Phi(te_1 - ua_2),$$

c'est-à-dire, grâce à (5.5) et (5.3),

$$(5.6) \quad \begin{aligned} \varphi_1(t)\varphi_1(t) \prod_{i=2}^n \varphi_i(u(a_{1i} - a_{2i})) \\ = \varphi_1(t+u) \prod_{i=2}^n \varphi_i(ua_{1i}) \varphi_1(t-u) \prod_{i=2}^n \varphi_i(-ua_{2i}). \end{aligned}$$

Or, si  $|u|$  est assez petit, on a  $\varphi_i(u(a_{1i} - a_{2i})) \neq 0$  pour tout  $i$ , de sorte que la relation précédente peut s'écrire sous la forme

$$(5.7) \quad (\varphi_1(t))^2 = \varphi_1(t+u)\varphi_1(t-u)\theta(u).$$

Il en résulte, grâce à (3.1), que  $\varphi_1$  est la fonction caractéristique d'une loi normale.

## 6. RETOUR SUR LES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES DES PARAGRAPHERS PRÉCÉDENTS

Dans l'étude des équations fonctionnelles des paragraphes précédents, nous nous étions systématiquement bornés à rechercher les solutions dans l'ensemble des fonctions caractéristiques. Nous nous proposons maintenant d'étudier ces mêmes équations (ou des équations analogues) dans l'ensemble de toutes les fonctions complexes continues définies dans  $\mathbf{R}$ .

Nous commencerons par l'équation fonctionnelle

$$(6.1) \quad (f(t) |f(u)|)^2 = f(t+u)f(t-u),$$

qui se réduit manifestement à l'équation (3.2) dans le cas où  $f$  est une fonction caractéristique.

(6.2) THÉORÈME. *Soit  $f$  une application continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$ , telle que  $f(0) = 1$ .*

*Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a)  *$f$  vérifie la relation (6.1) pour tout couple  $t, u$  de nombres réels ;*

(b) il existe deux nombres réels  $a, b$  tels que l'on ait

$$f(t) = \exp (at^2 + ibt)$$

pour tout nombre réel  $t$ .

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant:

(6.3) LEMME. Soit  $H$  une partie fermée de  $\mathbf{R}$  possédant les propriétés suivantes :

- (a)  $0$  appartient à  $H$ ;
- (b) si  $t$  appartient à  $H$ , alors  $-t$  appartient à  $H$ ;
- (c)  $2t$  appartient à  $H$  si et seulement si  $t$  appartient à  $H$ ;
- (d) si  $t + u, t - u$  appartiennent à  $H$ , alors  $t$  appartient à  $H$ .

Dans ces conditions on a, soit  $H = \{0\}$ , soit  $H = \mathbf{R}$ .

*Démonstration du Lemme.* Supposons que l'ensemble  $H$  possède un élément  $t_0$  non nul. D'après (b), on pourra supposer  $t_0$  positif. En vertu de (b) et de (c), il suffira de montrer que  $H$  contient l'intervalle  $[0, t_0]$ . Or il résulte de (c) que  $H$  contient tout nombre de la forme  $t_0/2^n$  avec  $n \geq 0$ . La propriété (d) entraîne alors que  $H$  contient aussi tout nombre de la forme  $kt_0/2^n$  avec  $0 \leq k \leq 2^n$ . Puisque  $H$  est fermé, il contient l'intervalle  $[0, t_0]$ , ce qui achève la démonstration du Lemme.

*Démonstration du théorème.* Il suffit de démontrer l'implication (a)  $\Rightarrow$  (b). Supposons donc la propriété (a) vérifiée.

1) Plaçons-nous d'abord dans le cas où la fonction  $f$  est réelle et positive. La relation (6.1) devient alors

$$(f(t)f(u))^2 = f(t+u)f(t-u).$$

Puisque  $f$  est continue et non nulle à l'origine, il existe un nombre réel  $t_0$  non nul tel que l'on ait  $f(t_0) > 0$ . Désignons par  $a$  la constante réelle déterminée par la condition  $f(t_0) = \exp (at_0^2)$ , et posons, pour tout nombre réel  $t$ ,

$$g(t) = \frac{f(t)}{\exp (at^2)}.$$

On a alors  $g(0) = 1, g(t_0) = 1$ ; en outre la fonction  $g$  vérifie la même équation fonctionnelle que  $f$ :

$$(g(t)g(u))^2 = g(t+u)g(t-u).$$

En particulier:

$$(g(u))^2 = g(u)g(-u),$$

$$(g(t))^4 = g(2t).$$

Il en résulte que l'ensemble fermé  $H = \{t: g(t) = 1\}$  vérifie les hypothèses du Lemme (6.3). Comme d'autre part  $H$  contient le nombre réel non nul  $t_0$ , il coïncide avec  $\mathbf{R}$ , ce qui revient à dire que l'on a  $f(t) = \exp(at^2)$  pour tout  $t$ .

2) Supposons ensuite  $|f| = 1$ . L'équation (6.1) devient alors

$$(6.4) \quad (f(t))^2 = f(t+u)f(t-u).$$

Puisque la fonction  $f$  est continue et qu'elle prend la valeur 1 à l'origine, il existe un intervalle ouvert  $I$ , centré à l'origine, dans lequel  $f$  ne prend jamais la valeur  $-1$ . Pour tout élément  $t$  de cet intervalle, désignons par  $\theta(t)$  la détermination principale de l'argument de  $f(t)$ . La fonction  $\theta$  est alors continue, nulle à l'origine et vérifie l'équation  $2\theta(t) = \theta(t+u) + \theta(t-u)$  pour tout couple  $t, u$  de nombres réels tels que  $t+u$  et  $t-u$  appartiennent à  $I$ .

En d'autres termes,  $\theta$  est une fonction linéaire affine: il existe donc une constante réelle  $b$  telle que l'on ait  $\theta(t) = bt$  (c'est-à-dire  $f(t) = \exp(ibt)$ ) pour tout élément  $t$  de  $I$ . Si l'on pose

$$g(t) = \frac{f(t)}{\exp(ibt)},$$

la fonction  $g$  vérifie, elle aussi, l'équation (6.4), donc en particulier l'équation  $(g(t))^2 = g(2t)$ . Puisque d'autre part elle est identiquement égale à 1 sur  $I$ , il en résulte qu'elle est égale à 1 partout. En d'autres termes, on a

$$f(t) = \exp(ibt).$$

3) Plaçons-nous enfin dans le cas général. Puisque  $f$  vérifie l'équation fonctionnelle (6.1), il en est de même de la fonction réelle positive  $|f|$ . Celle-ci a donc (d'après 1)) la forme:

$$|f(t)| = \exp(at^2).$$

On peut alors considérer le rapport  $f/|f|$ ; c'est une fonction de module égal à 1, vérifiant la même équation fonctionnelle que  $f$ . Par conséquent on a, d'après 2),

$$\frac{f(t)}{|f(t)|} = \exp(ibt).$$

Les deux dernières relations montrent que  $f$  a la forme désirée.

*Remarque.* De façon plus générale, on peut montrer que, si  $f$  est une application continue de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbf{C}$  vérifiant l'équation fonctionnelle (6.1) (mais non assujettie à la condition  $f(0) = 1$ ), alors  $f$  est, soit identiquement nulle, soit de la forme

$$(6.5) \quad f(t) = \exp(at^2 + ibt + ic),$$

où  $a, b, c$  sont des constantes réelles.

En effet, si l'on suppose  $f(0) = 0$ , l'équation (6.1) (pour  $t = u$ ) montre que  $f$  est identiquement nulle. Supposons donc  $f(0) \neq 0$ . La même équation (pour  $t = u = 0$ ) fournit alors  $|f(0)| = 1$ . Par conséquent la fonction  $f/f(0)$  vérifie encore l'équation fonctionnelle (6.1); puisqu'elle prend la valeur 1 à l'origine, le théorème précédent entraîne qu'elle est de la forme  $\exp(at^2 + ibt)$ . Si donc on pose  $f(0) = \exp(ic)$ , on obtient

$$f(t) = f(0) \exp(at^2 + ibt) = \exp(at^2 + ibt + ic).$$

On remarquera qu'inversement la fonction (6.5) vérifie l'équation fonctionnelle (6.1) quelles que soient les constantes réelles  $a, b, c$ ; cependant elle n'est une fonction caractéristique que dans le cas où la constante  $a$  est négative et la constante  $c$  est un multiple entier de  $2\pi$ .

Occupons-nous à présent des deux autres équations fonctionnelles rencontrées au paragraphe 1, à savoir

$$(6.6) \quad \varphi(t) = (\varphi(t/\sqrt{c}))^c,$$

$$(6.7) \quad \varphi(t) = (\varphi(t/c))^c,$$

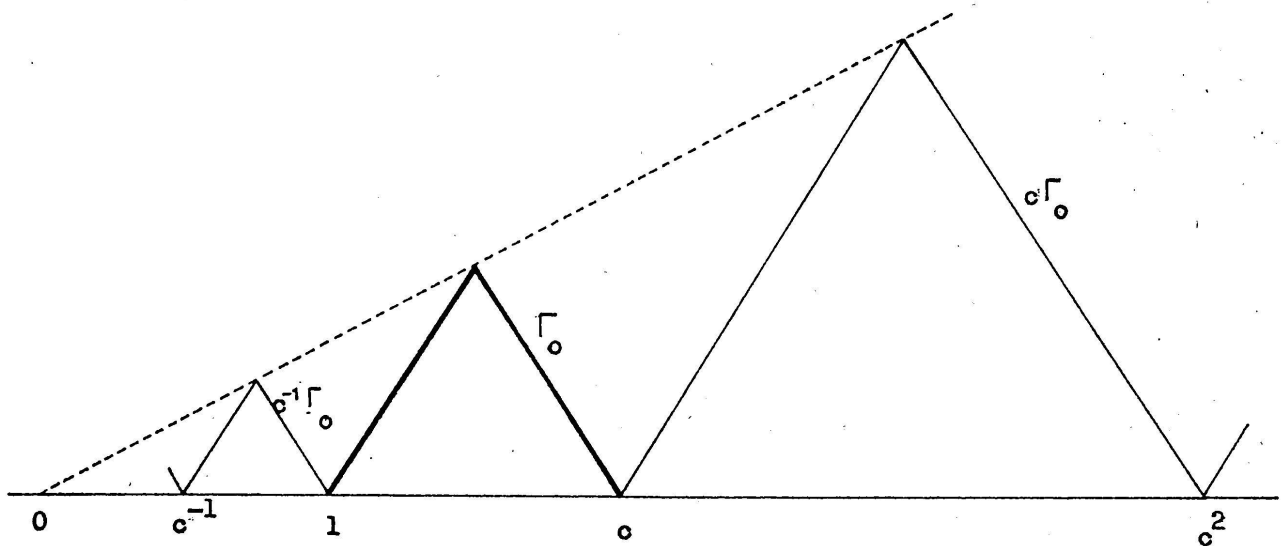
où  $c$  est une constante réelle, avec  $c > 1$ .

Dans chacune de ces deux équations la fonction inconnue  $\varphi$  sera supposée réelle, paire et strictement positive sur  $\mathbf{R}$ . En considérant la fonction  $f(t) = \text{Log } \varphi(\sqrt{|t|})$  (resp.  $f(t) = \text{Log } \varphi(t)$ ), l'équation (6.6) (resp. (6.7)) se réduit à

$$(6.8) \quad f(t) = cf(t/c).$$

Dans cette dernière équation la fonction inconnue  $f$  est réelle, paire, nulle à l'origine: il suffit donc de s'intéresser à sa restriction à l'intervalle  $]0, +\infty[$ . Or, si l'on désigne par  $\Gamma$  le graphe de cette restriction, l'équa-

tion (6.8) exprime le fait que  $\Gamma$  est invariant par rapport à l'homothétie de centre 0 et de rapport  $c$ , c'est-à-dire que l'on a  $c\Gamma = \Gamma$ . Pour avoir une solution, il suffit donc de se donner un graphe *arbitraire*  $\Gamma_0$  sur l'intervalle  $]1, c]$  et de poser ensuite  $\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} c^n \Gamma_0$ . La figure ci-dessous fournit un exemple.<sup>1)</sup>



Il est évident qu'en choisissant convenablement  $\Gamma_0$ , on peut obtenir des solutions de classe  $C^\infty$  sur  $]0, +\infty[$  et tendant vers 0 à l'origine.

On peut d'ailleurs remarquer que chacune des équations (6.6), (6.7), (6.8) est de la forme  $f = h \circ f \circ g^{-1}$  (où  $f$  est la fonction inconnue). Le résultat précédent est alors un cas particulier de la proposition suivante:

(6.9) PROPOSITION. Soient  $T, U$  deux ensembles,  $g$  une bijection de  $T$  sur lui-même,  $h$  une bijection de  $U$  sur lui-même. Considérons l'équation fonctionnelle

$$(6.10) \quad f = h \circ f \circ g^{-1},$$

où la fonction inconnue  $f$  est une application de  $T$  dans  $U$ .

Supposons qu'il existe une partie  $T_0$  de  $T$  telle que  $(g^n(T_0))_{n \in \mathbb{Z}}$  constitue une partition de  $T$ . Dans ces conditions, pour toute application  $f_0$  de  $T_0$  dans  $U$ , il existe une application unique  $f$  de  $T$  dans  $U$  qui prolonge  $f_0$  et qui vérifie l'équation fonctionnelle (6.10).

*Démonstration. Unicité.* Soit  $f$  une solution de (6.10). On a alors, pour tout entier  $n$ ,

$$f = h^n \circ f \circ g^{-n}$$

En particulier, si  $f$  prolonge  $f_0$ , on a, pour tout élément  $t$  de  $g^n(T_0)$ ,

<sup>1)</sup> L'idée de cette construction nous a été suggérée par Ph. Artzner.

$$f(t) = h^n [f_0(g^{-n}(t))].$$

Puisque  $(g^n(T_0))_{n \in \mathbb{Z}}$  est une partition de  $T$ , la formule précédente détermine univoquement  $f$  sur l'ensemble  $T$  tout entier.

*Existence.* Désignons par  $\Gamma_0$  le graphe de  $f_0$  et par  $H$  la bijection de  $T \times U$  sur lui-même définie par  $H(t, u) = (g(t), h(u))$ . L'ensemble

$$\Gamma = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} H^n(\Gamma_0)$$

est alors le graphe d'une application  $f$  de  $T$  dans  $U$ . Puisque  $\Gamma$  contient  $\Gamma_0$ ,  $f$  prolonge  $f_0$ . On a en outre  $H(\Gamma) = \Gamma$ , et cette relation montre que  $f$  vérifie l'équation fonctionnelle (6.10).

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNSTEIN, S. N. On a property characterizing the Gaussian Law. *Tr. Leningrad Politechn. Inst.*, 3 (1941), pp. 3-20.
- [2] DARMOIS, G. Sur une propriété caractéristique de la loi de probabilité de Laplace. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 232 (1951), 1999-2000.
- [3] FELLER, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. Vol. II, Wiley (1966).
- [4] HENNEQUIN, P. L. et A. TORTRAT. *Théorie des probabilités et quelques applications*. Masson et Cie (1965).
- [5] LUKACS, *Stochastic convergence*. Second edition, Academic Press (1975).
- [6] SKITOVITCH, V. P. Linear forms in independent random variables and the normal distribution law. *Izvestia AN SSSR, Ser. Mat.*, 18 (1954), pp. 185-200.

(Reçu le 26 août 1977)

Aimé Fuchs  
Giorgio Letta

Université de Strasbourg  
Département de Mathématique  
7, rue René-Descartes  
F-67084 Strasbourg