

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 25 (1979)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** CORPS RÉSOUBLES ET DIVISIBILITÉ DE NOMBRES DE CLASSES D'IDÉAUX  
**Autor:** Satgé, Ph.  
**Kapitel:** 1.1. Une famille de polynômes  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-50376>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 30.01.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Dans le troisième paragraphe, nous donnons la loi de décomposition des nombres premiers dans ces corps non galoisiens.

Enfin, dans le quatrième paragraphe, nous établissons les propriétés de divisibilité des nombres de classes annoncées au début en construisant des corps tchébychéviens dont les clôtures galoisiennes sont des extensions abéliennes non ramifiées de degré  $l$  de certains corps cycliques de degré  $l - 1$ . Les paragraphes 2, 3 et 4 sont essentiellement indépendants; seuls quelques lemmes établis au paragraphe 2 servent dans les paragraphes 3 et 4.

L'idée d'étudier les corps tchébychéviens m'a été donnée par Pierre Barrucand; les trois premiers paragraphes de ce travail ont été élaborés avec lui; je tiens à le remercier ici.

## 0) NOTATIONS

Nous désignons par  $n$  un nombre positif impair (dans les parties 2), 3) et 4) ce  $n$  sera supposé premier, nous poserons alors  $n = l$ ), par  $K$  le corps quadratique  $\mathbf{Q}(\sqrt{d})$  où  $d$  est sans carré, par  $\delta$  le discriminant de  $K$  et par  $\xi$  et  $\bar{\xi}$  deux entiers conjugués (non rationnels) de  $K$  tels que  $\xi\bar{\xi} = M^n$  où  $M$  est un entier rationnel. Nous choisissons une racine  $n$ -ième de  $\xi$  que nous notons  ${}^n\sqrt{\xi}$  et nous posons  ${}^n\sqrt{\bar{\xi}} = M/n\sqrt{\bar{\xi}}$ ,  $\zeta = \exp\left(\frac{2\pi i}{n}\right)$ ,  $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$  et  $L = \mathbf{Q}(\omega, \sqrt{d(\omega^2 - 1)})$ . Pour tout entier positif  $k$ , nous posons

$$t_k = ({}^n\sqrt{\xi})^k + ({}^n\sqrt{\bar{\xi}})^k, \quad t^{(k)} = \zeta^k {}^n\sqrt{\xi} + \zeta^{-k} {}^n\sqrt{\bar{\xi}},$$

$T^{(k)} = \mathbf{Q}(t^{(k)})$ ,  $t = t^{(0)}$  et  $T = T^{(0)}$ . Nous désignons par  $N$  la clôture galoisienne de  $T$ . Enfin, si  $A$  est un anneau,  $A^n$  est le semi-groupe des puissances  $n$ -ièmes des éléments de  $A$  et  $A^*$  est le groupe des éléments inversibles de  $A$ .

## 1) ETUDE GÉNÉRALE

### 1.1. Une famille de polynômes

Pour tout entier positif  $k$ , nous désignons par  $T_k(X)$  le polynôme vérifiant  $T_k(e^z + e^{-z}) = e^{kz} + e^{-kz}$  (c'est-à-dire, à une légère modification

près, le  $k$ -ième polynôme de Tchébychev de 1ère espèce). On a  $T_0(X) = 2$ ,  $T_1(X) = X$  et  $T_k(X) = XT_{k-1}(X) - T_{k-2}(X)$ .

Posons  $P_k(X; M) = M^{k/2} T_k(X/\sqrt{M})$ . On vérifie que, pour  $k > 0$ , les  $P_k(X; M)$  sont des polynômes unitaires de degré  $k$  à coefficients entiers, que  $P_0(X; M) = 2$ , que  $P_1(X; M) = X$  et que  $P_k(X; M) = XP_{k-1}(X; M) - MP_{k-2}(X; M)$ .

LEMME 1.1.1. *Pour tout entier positif  $k$ , on a  $P_k(t; M) = t_k$ .*

*Démonstration.* Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $e^z = \sqrt[n]{\xi}/\sqrt{M}$ , alors  $e^z + e^{-z} = t/\sqrt{M}$  et donc  $P_k(t; M) = M^{k/2} T_k(t/\sqrt{M}) = M^{k/2} (e^{kz} + e^{-kz}) = t_k$ .

Soit  $tr(\xi) = \xi + \bar{\xi}$ ; le lemme précédent appliqué avec  $k = n$  montre que  $P_n(t, M) - tr(\xi) = 0$ . De même, pour tout  $j$  on a  $P_n(t^{(j)}; M) - tr(\xi) = 0$ . On voit facilement que les  $t^{(j)}$  sont distincts deux à deux (car  $\xi$  n'est pas rationnel), ce sont donc les  $n$  racines de  $P_n(X; M) - tr(\xi)$ . De cela on déduit le lemme suivant:

LEMME 1.1.2.  *$\xi$  est une puissance  $n$ -ième dans  $K$  si et seulement si le polynôme  $P_n(X; M) - tr(\xi)$  admet une racine rationnelle qui permet très simplement de savoir si  $\xi$  est une puissance  $n$ -ième dans  $K$ . Enfin on a le critère d'irréductibilité suivant:*

PROPOSITION 1.1.3. *Le polynôme  $P_n(X; M) - tr(\xi)$  est irréductible si et seulement si, pour aucun diviseur premier  $l$  de  $n$ , le polynôme  $P_l(X; M^{n/l}) - tr(\xi)$  n'a de racines rationnelles.*

*Démonstration.* Notre polynôme est irréductible si et seulement si le corps  $T = \mathbf{Q}(t)$  est de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ . Mais,  $n$  étant impair,  $T$  est de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$  si et seulement si  $K(\sqrt[n]{\xi})$  est une extension de degré  $n$  sur  $K$ . Cela équivaut à ce que, pour aucun diviseur premier  $l$  de  $n$ , le nombre  $\xi$  n'est une puissance  $l$ -ième dans  $K$ ; on conclut à l'aide du lemme précédent.

## 1. 2. Les corps tchebycheviens

DÉFINITION 1. 2. 1. Le corps  $T$  obtenu par le procédé précédent est dit tchebychevien si il est de degré  $n$  sur  $\mathbf{Q}$ . Dans ce cas on dira que  $T$  est le corps tchebychevien associé à  $\xi$  ou que  $\xi$  est un entier quadratique définissant le corps tchebychevien  $T$ .