

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 25 (1979)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LES ÉQUATIONS POLYNOMIALES DANS LES QUATERNIONS
Autor: Beck, Bernard
Kapitel: II. DÉTERMINATION DES RACINES D'UN POLYNOME P DE H [X]
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-50378>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 30.01.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

II. DÉTERMINATION DES RACINES D'UN POLYNÔME P DE $H[X]$.

LEMME 1. Soient $P(X) \in H[X]$ et $\lambda \in K$; alors on a $P(\lambda) = 0$ si et seulement si $X - \lambda$ divise $P(X)$ dans $H[X]$.

Démonstration. Evidente.

LEMME 2. Soient $P(X) \in H[X]$ et Δ un polynôme irréductible de degré 2 dans $K[X]$; alors, si Δ est le polynôme caractéristique d'un quaternion q , on a l'alternative suivante :

- a) Δ divise P et alors tous les conjugués $\sigma q \sigma^{-1}$ de q sont racines de P ,
- b) Δ ne divise pas P et alors au plus un conjugué q' de q est racine de P .

Démonstration.

- a) Si Δ divise P , il existe $P_1 \in H[X]$ tel que pour tout élément x de H , on ait $P(x) = P_1(x) \Delta(x)$ et le résultat 1 montre que tout quaternion conjugué de q est racine de P . Il y en a une infinité.
- b) Si Δ ne divise pas P , alors on a $P = P_1 \Delta + aX + b$ avec a et b dans H non simultanément nuls.
 - b₁) Si $a = 0$, pour tout quaternion q de polynôme caractéristique Δ , on a: $P(q) = b \neq 0$.
 - b₂) Si $a \neq 0$, il existe au plus une solution au problème, à savoir $-a^{-1}b$, et pour cela il faut et il suffit que Δ soit le polynôme caractéristique de $-a^{-1}b$. \square

Nous sommes en mesure maintenant de démontrer le résultat principal.

THÉORÈME. Soient P un polynôme de $H[X]$ et q un quaternion quelconque de H . Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) Il existe un conjugué q' de q tel que $P(q') = 0$.
- (ii) Le polynôme caractéristique de q divise $n(P)$ dans $K[X]$.
- (iii) Le quaternion q est racine de $n(P)$.

Démonstration. Le polynôme Δ_q est dans le centre $K[X]$ de l'anneau $H[X]$. On peut donc calculer modulo Δ_q dans $H[X]$ (i.e. modulo l'idéal bilatère $\Delta_q \cdot H[X]$ de $H[X]$).

Si Δ_q divise P , le théorème est évident. Supposons donc que Δ_q ne divise pas P . On a $P(X) \equiv aX + b \pmod{\Delta_q}$ avec a, b dans H non simultanément nuls.

(i) \Rightarrow (ii): Si $P(q') = 0$, alors $a \neq 0$ et $q' = -a^{-1}b$. Or $n(P) = P\bar{P} \equiv (aX+b)(\bar{a}X+\bar{b}) \equiv n(a) \Delta_{-a^{-1}b} \pmod{\Delta_q}$.

Or $-a^{-1}b = q'$ et $\Delta_{q'} = \Delta_q$, donc $n(P) \equiv 0 \pmod{\Delta_q}$. Donc Δ_q divise $n(P)$ dans $K[X]$.

(ii) \Rightarrow (iii): évident.

(iii) \Rightarrow (i): On a $n(P) \equiv (aX+b)(\bar{a}X+\bar{b}) \pmod{\Delta_q}$. Si $a = 0$, alors $n(P) \equiv n(b) \pmod{\Delta_q}$, donc $n(P)(q) = n(b) \neq 0$. Ceci est contraire à l'hypothèse. Donc $a \neq 0$. Par suite on a $n(P) \equiv n(a) \Delta_{-a^{-1}b} \pmod{\Delta_q}$. Comme $n(P)(q) = 0$, on a $\Delta_{-a^{-1}b}(q) = 0$; donc $\Delta_{-a^{-1}b} = \Delta_q$ et ainsi $P(-a^{-1}b) = 0$. \square

III. QUELQUES CONSÉQUENCES DU THÉORÈME

COROLLAIRE 1. *Supposons que H soit le corps des quaternions classiques sur le corps \mathbf{R} des nombres réels. Alors, pour tout polynôme P de $H[X]$ non constant, il existe un quaternion q de H tel que $P(q) = 0$.*

Démonstration. On peut supposer que P n'a pas de racines dans \mathbf{R} . Alors, d'après le lemme 1, $n(P)$ n'a pas de facteur du premier degré dans $\mathbf{R}[X]$.

Soit Δ un polynôme irréductible de degré 2 dans $\mathbf{R}[X]$, divisant $n(P)$. Un tel Δ existe puisque degré $n(P) = 2$ degré $P \geq 2$. Or on sait qu'il existe un quaternion q tel que $\Delta_q = \Delta$ et le théorème nous dit qu'il existe un conjugué q' de q tel que $P(q') = 0$. \square

C'est le résultat (i) de Niven.

COROLLAIRE 2. *Soit H un corps de quaternions généralisés de centre K . Un polynôme P de $H[X]$ admet une infinité de racines si et seulement s'il existe un polynôme irréductible Δ de degré 2 de $K[X]$ et un quaternion q tel que $\Delta = \Delta_q$ et Δ divise P .*

La démonstration est une conséquence triviale du lemme 2 et du théorème. Si $K = \mathbf{R}$, tout polynôme irréductible de degré 2 est le polynôme caractéristique d'un quaternion q , d'où le résultat (ii) de Niven.

COROLLAIRE 3. *Soit H un corps de quaternions généralisés de centre K . Si le polynôme P de $H[X]$ n'a qu'un nombre fini de racines, celui-ci est inférieur ou égal au degré de P .*