

# §1. Introduction

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# LEVINE'S FORMULA IN KNOT THEORY AND QUADRATIC RECIPROCITY LAW

by A. LIBGOBER

## § 1. INTRODUCTION

A  $k$ -knot is a  $k$ -dimensional submanifold of  $S^{k+2}$  which is homeomorphic to a sphere. Any knot  $K$  is bounded by a submanifold  $F^{k+1} \subset S^{k+2}$  which is called the Seifert surface of  $K$ . One associates with  $K$  the Alexander polynomial  $\Delta(t)$ . Moreover if  $k = 4n + 1$  then one may associate with  $F^{4n+2}$  the non-degenerate quadratic  $Z_2$ -form  $\varphi$  on  $H_{2n+1}(F^{4n+2}, Z_2)$ . Levine's formula asserts that the Arf invariant of this quadratic form is trivial if  $\Delta(-1) \equiv \pm 1 \pmod{8}$  and is non trivial if  $\Delta(-1) \equiv \pm 3 \pmod{8}$ .

Levine's proof consists of two parts. The first one is topological and states that both the quadratic function  $\varphi$  on  $H_{2n+1}(F^{4n+2}, Z_2)$  which is used for the computation of the Arf invariant, and the Alexander polynomial can be expressed in terms of the Seifert pairing  $L$  of  $F^{4n+2}$ , which is the bilinear form on  $H_{2n+1}(F^{4n+2}, Z)$ . Namely

$$(1) \quad \varphi(x \bmod 2) \equiv L(x, x) \bmod 2$$

and

$$(2) \quad \Delta(t) = \det(L - tL^t)$$

i.e.

$$(2a) \quad \Delta(-1) = \det(L + L^t).$$

( $L^t(x, y)$  is by definition  $L(y, x)$ ).

The second part of Levine's proof is the remarkable observation that the Arf invariant of a quadratic function defined by (1) can be found in terms of the associated bilinear form  $L + L^t$ . He proved the following (cf. [6])

*Levine's lemma.* Let  $L(x, y)$  denote a bilinear form on a free abelian group such that  $d = \det(L + L^t)$  is odd. Let  $\varphi$  denote the quadratic function on  $V \otimes \mathbb{Z}_2$  defined by (1). Then

$$\text{Arf } \varphi = \begin{cases} 1 & \text{if } d \equiv \pm 1 \pmod{8} \\ -1 & \text{if } d \equiv \pm 3 \pmod{8} \end{cases}$$

(We suppose that the range of Arf invariant is  $\pm 1$ ).

The purpose of this paper is to show that Levine's lemma is closely related to the Weil-Milgram reciprocity law ([4], [5]). In fact our main result is a generalization of Levine's lemma to arbitrary algebraic number fields.

Let  $F$  denote an algebraic number field and  $L$  be a bilinear form on a projective module  $P$  over the ring  $R$  of integers in  $F$ . Suppose that the determinant of the symmetrized form  $d = \det(L + L^t)$  is relatively prime to 2.

For any dyadic (i.e. dividing 2) prime ideal  $\mathfrak{p}$ , let  $\text{Arf } L_{\mathfrak{p}}$  denote the Arf invariant of the quadratic form  $x \rightarrow L(x, x) \pmod{\mathfrak{p}}$  over  $P \otimes R/\mathfrak{p}$ . For  $a \in R$  and a nondyadic prime ideal  $\mathfrak{p}$  we denote the quadratic residue symbol by

$$\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{if } a \text{ is square in } R/\mathfrak{p} \\ 0 & \text{if } a \in \mathfrak{p} \\ -1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

In the same way we denote the multiplicative extension of  $\left(\frac{a}{\mathfrak{p}}\right)$  on the group of all non-dyadic ideals of  $R$ .

**THEOREM.** *With the above notations,*

$$(4) \quad \prod_{\mathfrak{p}} \text{Arf } L_{\mathfrak{p}} = \left(\frac{2}{dR}\right)$$

where  $\mathfrak{p}$  runs through all tamely ramified dyadic prime ideals of  $R$  and  $dR$  is the principal ideal generated by  $d$ .

In § 2 we give the necessary definitions and formulate two lemmas about Gauss sums for bilinear forms.

In § 3 we prove the theorem, using the results of § 2. The proofs of the lemmas in § 2 is given in § 4. Finally I would like to thank A. Adler, W. Pardon, and C. Weibel for useful discussions.