$= e_a + e_b - e_{ab} - e_1 = -(e_a - e_1)(e_b - e_1)$. On a, de même, une application naturelle ψ de $G \times G$ dans J^2 qui au couple (a, b) associe le produit $\bar{a} \,.\, \bar{b}$ dans $A_I = \mathbf{Z}[G]/I$; il est clair que cette application est symétrique. De plus $\psi(a, b) + \psi(a, c) - \psi(a, bc)$ est l'image dans A_I de $(e_1 - e_a)$ $(e_1 - e_b)$ $(e_1 - e_c)$, c'est-à-dire que ψ induit une application biadditive symétrique de $G \times G$ dans $J^2{}_{/J^3}$ qui est surjective car les éléments $\bar{a} \,.\, \bar{b}$ engendrent J^2. On voit immédiatement que $\psi(a, b) = 0$ si $a \in N_{ab}$, donc ψ induit une surjection de W sur le groupe $J^2{}_{/J^3}$. Une démonstration directement inspirée de [8], III, § 5, permet de montrer que cette surjection est un isomorphisme.

Appendice: Discriminant et déterminant

Soit $X = \operatorname{Spec}(R)$ l'ensemble des idéaux premiers de R muni de la topologie de Zariski et $H_0(R)$ l'anneau des fonctions continues de $\operatorname{Spec}(R)$ dans Z muni de la topologie discrète. Comme X est quasi-compact, un élément f de $H_0(R)$ est la donnée d'une partition finie de X en parties ouvertes et fermées X_i et pour chaque X_i d'un entier naturel n_i qui est la valeur de f sur X_i. Si $P \in \mathscr{P}(R)$, pour chaque idéal premier $\underline{p}$, $P_{\underline{p}}$ est un $A_{\underline{p}}$-module libre de rang $r_p(\underline{p})$; la fonction r_p définie sur X par $\underline{p} \mapsto r_p(\underline{p})$ est continue (i.e. localement constante). C'est donc un élément de $H_0(R)$ qu'on note r_p. On a alors un homomorphisme d'anneaux $r : K_0(R) \to H_0(R)$ car $r_{p \oplus p'} = r_p + r_{p'}$, et $r_{p \otimes Q} = r_p \, r_Q$, dont le noyau mesure la non-liberté (stablement) des R-modules projectifs de type fini ([2]). Cet homomorphisme est surjectif car si $f \in H_0(R)$ est positive et $f^{-1}(n_i) = X_i = \operatorname{Spec}(R\, e_i)$, $P = \bigoplus_{i \in I} (R\, e_i)^{n_i}$ est un R-module projectif de type fini de rang $r_p = f$.

Soit de nouveau $f \in H_0(R)$ une fonction positive; nous pouvons définir sur $K_0(R)$, $K_0^{SB}(R)$, ... des opérations λ^f et σ^f. En effet, soit n_i la valeur prise par f sur $X_i = \operatorname{Spec} R\, e_i$: tout module projectif P est somme directe des $P\, e_i$ et on pose $\Lambda^f P = \bigoplus_{i \in I} \Lambda^{n_i}(P\, e_i)$ et de même pour SB ou pour des modules bilinéaires ou quadratiques. En particulier, on appelle *déterminant* de P, le R-module $\Lambda^{r_P} P$ qui est projectif de type fini et de rang 1 et on le note $\text{dét}\, P$ ([2]). On voit immédiatement que $\text{dét}(P \oplus Q) = \text{dét}\, P \otimes \text{dét}\, Q$. Les opérations Λ^f et S^f et l'homomorphisme déterminant s'étendent à $K_0(R)$, tout entier ainsi qu'aux anneaux considérés dans la partie 3 (si $N \in \underline{\operatorname{Pic}}(R)$, $\text{dét}\, N = N$ et l'inverse de N est N^*; ainsi $\text{dét}(-[P])$

$=$ dét $(P)^*\ldots$). L'homomorphisme déterminant va de $K_0(R)$ dans $\mathrm{Pic}(R)$; $N^{\otimes f}$ se définit pour $f \in H_0(R)$ par $\bigoplus_{n_i \geq 0} (N e_i)^{\otimes n_i} \oplus \bigoplus_{n_i \leq 0} (N^* e_i)^{\otimes n_i}$).)

Dans le cas des modules bilinéaires, symétriques ou alternées, ou encore quadratiques, on définit le discriminant de (M, φ, N) comme le module bilinéaire $\operatorname{dis}(\varphi) = (\text{dét } M, \Lambda^{r_M}\varphi, N^{\otimes r_M})$ et on a la formule $\operatorname{dis}(\varphi \otimes \varphi') = \operatorname{dis} \varphi \otimes \operatorname{dis} \varphi'$. On obtient ainsi par exemple des homomorphismes $\operatorname{dis}: K_0^{SB}(R) \to U(K_0^{SB}(R))$ et $\operatorname{dis}: \overline{K_0^{SB}}(R) \to U(\overline{K_0^{SB}}(R))$, ces deux derniers groupes se déterminent aisément. On a un homomorphisme surjectif de ces deux groupes dans $Ip(R)$ groupe des éléments inversibles de $H_0(R)$ (fonctions continues de Spec R dans $\{-1, +1\}$) dont le noyau U_0 est respectivement l'ensemble des classes d'isomorphisme des paires (P, α), $P \in \mathrm{Pic}(R)$, α isomorphisme de $P \otimes P$ dans R, et des triples $(P, \alpha. Q)$, $P, Q \in \underline{\mathrm{Pic}}(R)$ et α isomorphisme de $P \otimes P$ dans Q. On a alors les deux suites exactes de groupes abéliens

$$U(R)^2 \to U(R) \to U_0(K_0^{SB}(R)) \to \mathrm{Pic}(R)^2 \to \mathrm{Pic}(R)$$
$$U(R)^2 \to U(R) \to U_0(\overline{K_0^{SB}}(R)) \to \mathrm{Pic}(R) \to 0$$

Le groupe $U_0(K_0^{SB}(R))$ est le groupe $\mathscr{P}(R)$ considéré dans [7]. Le discriminant d'un module bilinéaire alterné est toujours un module bilinéaire symétrique de rang 1. Dans le cas quadratique, cela dépend de la parité du rang du module. On dispose dans ce cas d'un invariant plus fin, l'invariant d'Arf pour lequel nous renvoyons à [7] et qui se ramène au discriminant si $\frac{1}{2} \in R$.

Le discriminant d'un module métabolique ou hyperbolique n'est pas toujours trivial. En effet, $\operatorname{dis} H(P)$ est canoniquement isomorphe à (dét $P \otimes$ dét P^*, φ_p, A) où φ_p : dét $P \otimes$ dét $P^* \to A$ est l'isomorphisme qui envoie le générateur canonique de dét $P \otimes$ dét P^* sur $(-1)^{r_P}$. Pour obtenir une application discriminante sur $K_0^{SB}(R)$ nulle sur les espaces hyperboliques, il faut modifier la définition du discriminant en multipliant le discriminant ordinaire par un facteur correctif dépendant du rang du module. Ce n'est plus un homomorphisme de groupes mais cela le redevient si on fait intervenir le rang modulo 2 du module.

Une dernière remarque: soit (M, φ, N) un module bilinéaire (ou quadratique) tel que r_M soit impair, donc de la forme $1-2f$. Alors $\Lambda^{r_M}\varphi$ est un isomorphisme de dét $M \otimes$ dét M sur $N^{\otimes r_M}$, ce qui montre que N est isomorphe à $(\text{dét } M \otimes N^{\otimes f})^2 = Q \otimes Q$ de sorte qu'on peut ramener (M, φ, N) à une forme bilinéaire à valeurs scalaires sur $M \otimes Q^*$.