II. Allgemeine Klassifikationsmethoden

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

II. Allgemeine Klassifikationsmethoden

Die geometrischen Ideen von Study haben die spätere Entwicklung nicht beeinflußt. Die folgende Zeit war durch ein Wechselspiel zwischen der Entwicklung allgemeiner Struktursätze und Versuchen, die Algebren kleiner Dimension tatsächlich zu klassifizieren, charakterisiert. Das Hauptziel war jedenfalls die Beschreibung einer Normalform für endlichdimensionale Algebren, aus der man dann durch explizite Berechnungen die einzelnen Isomorphietypen ableiten kann. Solche Normalformen wurden etwa in [21], [36] und [27] formuliert. Wir verzichten hier darauf, diese Normalform zu skizzieren: Man würde sie heute unmittelbar aus mittlerweile bekannten Struktursätzen, wie denen von Wedderburn-Malcev und Wedderburn-Molien ableiten, die eben bei der Beschäftigung mit dem Normalformproblem entwickelt wurden. Diese allgemeinen Ergebnisse haben sich ja in den Lehrbüchern tradiert. Wir wollen nun einige Ergebnisse erläutern, die sich im Zusammenhang mit der Klassifikation in kleinen Dimensionen als nützlich erwiesen haben.

Scheffers Beiträge [36] zu der Theorie ermöglichten einige Vereinfachungen im Aufstellen der Algebren einer festen Dimension. Zunächst führte er den noch heute üblichen Zerlegbarkeitsbegriff ein. Da die Klassifikation induktiv durchgeführt wurde, konnte man sich somit auf unzerlegbare Algebren (also Algebren ohne nicht-triviale zentrale Idempotente) beschränken. Er unterteilte die Algebren in Quaternionensysteme und Nichtquaternionensysteme. Quaternionensysteme sind dadurch gekennzeichnet, daß sich die Algebra aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$ als Unteralgebra einbetten läßt. Und er bewies, daß es keine unzerlegbaren Quaternionensysteme der Dimension fünf oder sechs geben kann.

Die Nichtquaternionensysteme mit mehreren orthogonalen Idempotenten bereiten naturgemäß keine großen Schwierigkeiten. Somit lag also die Hauptschwierigkeit bei der Klassifikation der lokalen Algebren. Es gab einige Ansätze [44], [45], um lokale Algebren allgemein zu klassifizieren. Aber dies führt zu Resultaten, die keinen Hinweis enthalten, ob die damit verbundenen Rechnungen in höheren Dimensionen überhaupt durchführbar sind.

Bei der Klassifikation der lokalen Algebren wurde eine schon erwähnte Idee von Study aufgegriffen. Man unterteilte diese Algebren nach ihrer Ordnung und konnte für gewisse Extremwerte eine vollständige Klassifikation durchführen. Wir wollen dies an einem Beispiel vorführen. Sei A

eine lokale Algebra der Dimension n $(n>4)$ und $\operatorname{ord}(A) = n-1$. Es gibt also x, y im Radikal von A, so daß $x, x^2, \ldots, x^{n-2}, y$ eine Basis bilden. Man sieht leicht, daß wir annehmen können: $xy = 0$, $yx = ax^{n-2}$, $y^2 = bx^{n-2}$ mit $a, b \in \mathbf{C}$. Und die Voraussetzung $n > 4$ erlaubt nun, die Parameter a, b wie folgt zu wählen:

(a, b)	A
$(0, 0)$	$k[x, y] / (x^{n-1}, y^2, xy)$
$(0, 1)$	$k[x, y] / (x^{n-2} - y^2, xy)$
$(1, 0)$	$k < x, y > / (x^{n-2} - yx, y^2, xy)$
$(1, 1)$	$k < x, y > / (x^{n-2} - y^2, xy, yx - y^2)$

(wobei $k < x, y >$ die freie Algebra in zwei Erzeugenden bezeichnet) Diese Ergebnisse sind in [27], [36] enthalten. Eine weitere Möglichkeit zur Untersuchung der lokalen Algebren liefert der Begriff des Geschlechts einer lokalen Algebra. Dies ist die Zahlenfolge $(\dim J^i/J^{i+1})_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, mit $J = \operatorname{rad} A$. Diese Unterteilung in grobe Klassen (nach Ordnung und Geschlecht) kann man sehr gut in der Arbeit von Voghera [51] erkennen.

Wir wollen abschließend festhalten, daß in schwierigen Fällen (z.B. $\operatorname{ord}(A) = 3$) umfangreiche Rechnungen erforderlich waren, um diese grobe Einteilung so zu verfeinern, daß man die einzelnen Isomorphietypen erhält. Da in höheren Dimensionen, nämlich für $n \geqslant 4$, die Klassifikation nicht mehr endlich ist, ergab sich zusätzlich das Problem, einen minimalen Parameterbereich für die unendlichen Serien anzugeben. Dieses Problem wurde in einigen Fällen auch gelöst.

So enthält die Arbeit von Study [47] folgende Multiplikationstabelle einer Serie vierdimensionaler lokaler Algebren. Dabei bezeichne e_0, e_1, e_2, e_3 eine Basis der Algebra.

	e_0	e_1	e_2	e_3
e_0	e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	e_3	e_3	0
e_2	e_2	$-e_3$	ce_3	0
e_3	e_3	0	0	0

Der minimale Parameterbereich für c ist die projektive Gerade über $\mathbf{C}$. Genauere Untersuchungen zur geometrischen Struktur solcher Parameterbereiche wurden jedoch damals nicht angestellt.