OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

Autor(en): **Kratzer, Ch.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-51063

BIBLIOGRAPHIE

[1] Atiyah, M. and D. Tall. Group representations, λ-rings and the J-homomorphism. *Topology 8* (1969), 253-297.

[2] Berthelot, P. Généralités sur les λ-anneaux. Exposé V de SGA 6. *Springer Lecture Notes 225* (1971), 197-364.

[3] —— Le $K^{\bullet}$ d'un fibré projectif: calculs et conséquences. Exposé VI de SGA 6. *Springer Lecture Notes 225* (1971), 365-415.

[4] Bourbaki, N. *Algèbre*, chap. VIII. Hermann (1958).

[5] Curtis, C. and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. Interscience (1962).

[6] Heller, A. and I. Reiner. Grothendieck groups of orders in semi-simple algebras. *Trans. Amer. Math. Soc. 112* (1964), 344-355.

[7] Kervaire, M. Opérations d'Adams ou théorie de la représentation linéaire des groupes finis. *Ens. Math. 22* (1976), 1-28.

[8] Manin, Y. Lectures on the K-functor in algebraic geometry. *Russ. Math. Surveys 24 (5)* (1969), 1-89.

[9] Serre, J.-P. Groupes de Grothendieck des schémas en groupes réductifs déployés. *Publ. Math. IHES 34* (1968), 37-52.

[10] Swan, R. A splitting principle in algebraic K-theory. *Proc. Symp. in Pure Math. 21* (1971), 155-159.

(Reçu le 15 août 1979)

Ch. Kratzer

Institut de Mathématiques
Université de Lausanne
CH-1015 Lausanne-Dorigny

OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

par Ch. KRATZER

Si A est un anneau commutatif, on connaît une certaine famille d'opérations ψ^k, k entier, agissant sur l'anneau $R_A(G)$ des représentations A-linéaires d'un groupe G quelconque, analogues aux opérations introduites par F. Adams en K-théorie topologique. Dans le cadre des représentations de groupes, ces opérations ont été introduites par R. Swan [10]; la technique (« splitting principle ») utilisée par ce dernier comme par d'autres [3], [8], est inspirée de la topologie et adaptée au cadre des représentations par le biais de la géométrie algébrique. Nous la présentons ici du point de vue universel en étudiant les représentations polynomiales de GL_n, ce qui permet d'établir en particulier un « splitting principle », de manière très directe à partir de [9]. L'apport de géométrique algébrique est alors la « connaissance » des représentations du groupe algébrique $GL_n(K)$ sur un corps K algébriquement clos.

On peut enfin remarquer que lorsque A est un corps et G un groupe fini, M. Kervaire [7] a obtenu des propriétés supplémentaires concernant les opérations ψ^k par des techniques élémentaires, notamment l'extension de corps et la restriction aux sous-groupes.

1. L'ANNEAU $R_A(G)$

Soient A un anneau commutatif avec unité et G un groupe quelconque (non nécessairement fini). On désigne par AG l'*algèbre du groupe G*, c'est-à-dire le A-module libre de base G, muni de la multiplication induite par celle de G. Une *représentation* de G sur A est une classe d'isomorphisme de AG-modules (à gauche), A-libres de type fini. Le choix d'une A-base de V permet d'associer à la classe d'isomorphisme $\{V\}$ un homomorphisme $\rho : G \to GL_n(A)$ unique à conjugaison près. On dit que ρ est la *forme matricielle* de la représentation. Il est utile de généraliser un peu le concept de représentation et de considérer la sous-catégorie pleine $\mathscr{P}_A^G$ de la catégorie abélienne des AG-modules formée des modules qui sont *projectifs de type fini en tant que A-modules.* On notera $R_A(G)$ le *groupe de Grothen-*

dieck de $\mathscr{P}_A^G$ défini comme le quotient du groupe abélien libre L sur les classes d'isomorphisme $\{ V \}$ d'objets de $\mathscr{P}_A^G$ par les relations $\{ V \} = \{ V' \} + \{ V'' \}$ associées aux suites exactes $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$. On remarque que le produit tensoriel sur $A : (V, V') \to V \otimes_A V'$, muni de l'action diagonale du groupe G préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit par conséquent une structure d'*anneau commutatif avec unité* sur $R_A(G)$.

Si $\rho : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, ρ s'étend en un homomorphisme d'algèbre $\rho : AG \to AG'$, et tout AG'-module V devient un AG-module par $\lambda \cdot v = \rho(\lambda) \cdot v$. On en déduit un homomorphisme d'anneaux:

$$\rho^* : R_A(G') \to R_A(G)$$

dit de *restriction*. De même, si $f : A \to A'$ est un homomorphisme d'anneaux, tout AG-module V fournit un $A'G$-module $A' \otimes_A V$. On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux:

$$f_* : R_A(G) \to R_{A'}(G)$$

dit d'*extension des scalaires*. En d'autres termes, $R_A(G)$ est un foncteur contravariant en G et covariant en A.

On définit encore $IR_A(G)$ l'*idéal d'augmentation* de $R_A(G)$, comme le noyau de l'homomorphisme de restriction $R_A(G) \to R_A(1) = K_0(A)$ (scindé par l'homomorphisme de restriction $\varepsilon : R_A(1) \to R_A(G)$). $IR_A(G)$ est muni d'une structure de $K_0(A)$-*algèbre* via ε.

Remarques. (1) Si $R'_A(G)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{L}_A^G$ des AG-modules A-libres de type fini, l'inclusion de catégories $\mathscr{L}_A^G \hookrightarrow \mathscr{P}_A^G$ induit un monomorphisme sur les groupes de Grothendieck

$$i : R'_A(G) \to R_A(G)$$

(Comme les modules projectifs sont facteurs directs des modules libres, l'assertion suit du critère [6, lemma 1]:

$[M] = [N]$ dans $R_A(G)$ (resp. $R'_A(G)$) $\Leftrightarrow$ il existe $U, V, W \in \mathscr{P}_A^G$ (resp. $\mathscr{L}_A^G$) et deux suites exactes

$$0 \to U \to M \oplus W \to V \to 0 \quad \text{et} \quad 0 \to U \to N \oplus W \to V \to 0).$$

On vérifie ensuite aisément que i induit un isomorphisme sur les idéaux d'augmentation

$$i : IR'_A(G) \xrightarrow{\sim} IR_A(G).$$

Ainsi, la généralisation des modules libres aux modules projectifs se traduit par une structure supplémentaire: l'action de $K_0(A)$ sur l'idéal d'augmentation.

(2) Si V est une représentation de G sur A de forme matricielle $\rho : G \to GL_n(A)$, on peut considérer $\rho^* : R_A(GL_n(A)) \to R_A(G)$ et alors

$$[V] = \rho^* [A^n_{id}]$$

où $[A^n_{id}]$ est la classe de la représentation $id : GL_n(A) \to GL_n(A)$. De ce point de vue, les groupes $GL_n(A)$ jouent un rôle universel pour les représentations. Nous allons donc étudier maintenant un type particulier de représentations de $GL_n(A)$.

2. Représentations polynomiales de GL_n

Soit A un anneau commutatif avec unité. On considère le foncteur

$$GL_n : \mathscr{A}lg_A \to \mathscr{G}r \; ; \; A' \mapsto GL_n(A')$$

de la catégorie des A-algèbres commutatives avec unité dans celle des groupes. Une *représentation polynomiale* de GL_n sur l'anneau A est une transformation naturelle de foncteurs

$$\rho : GL_n \to GL_m$$

déterminée par une famille de polynômes $\rho_{ij}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1})$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ à coefficients dans A comme suit:

$$\rho_{A'} : GL_n(A') \to GL_m(A')$$

est définie par les fonctions polynomiales ρ_{ij} sur A'.

Exemple. La puissance extérieure $\lambda^2 : GL_2 \to GL_1$ est une représentation polynomiale sur $\mathbf{Z}$ définie par la fonction polynomiale

$$\rho(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} .$$

Comme $GL_n(A)$ est un groupe algébrique affine, son algèbre affine

$$A(GL_n) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}]$$

(algèbre des fonctions polynomiales sur GL_n) est une *algèbre de Hopf* (la multiplication $GL_n \times GL_n \to GL_n$ induit la comultiplication

$$A(GL_n) \to A(GL_n \times GL_n) = A(GL_n) \otimes A(GL_n)) .$$

Soit E un A-module. Une structure de $A(GL_n)$-comodule sur E est la donnée d'un homomorphisme A-linéaire

$$d_E : E \to A(GL_n) \otimes_A E$$

vérifiant les axiomes duaux d'une structure de module. Un *homomorphisme* de $A(GL_n)$-comodules $f : E \to E'$ est une application A-linéaire compatible avec d_E et $d_{E'}$. L'ensemble

$$\mathrm{Hom}^{A(GL_n)}(E, E')$$

des homomorphismes de $A(GL_n)$-comodules est donc un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_A(E, E')$ des applications A-linéaires. On montre alors que la catégorie des $A(GL_n)$-comodules est abélienne [9] (pour l'existence de noyaux, on utilise le fait que $A(GL_n)$ est un A-module plat, ce qui assure que si $E \subset E'$, alors $A(GL_n) \otimes E \subset A(GL_n) \otimes E'$).

LEMME 2.1. *La donnée d'une classe de conjugaison par des matrices de* $GL_m(A)$ *d'une représentation polynomiale* $\rho : GL_n \to GL_m$ *est équivalente à celle d'une classe d'isomorphisme de* $A(GL_n)$*-comodules* A*-libres de rang* m.

Preuve. La correspondance est donnée par la formule

$$d_E(e_i) = \sum_{j=1}^{m} \rho_{ji}(X_{11}, \ldots, X_{nn}, \det(X)^{-1}) \otimes e_j$$

où $\{e_1, \ldots, e_m\}$ est une A-base de A^m. $\square$

Soit $\mathscr{P}_A(GL_n)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie des $A(GL_n)$-comodules formée des comodules qui sont *projectifs de type fini en tant que* A*-modules* (généralisation des représentations polynomiales de GL_n). On note alors $R_A(GL_n)$ le groupe de Grothendieck de $\mathscr{P}_A(GL_n)$ (quotient du groupe abélien libre sur les classes d'isomorphisme d'objets $\{E\}$ de $\mathscr{P}_A(GL_n)$ par les relations $\{E\} = \{E'\} + \{E''\}$ associées aux suites exactes $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$. Le produit tensoriel sur $A : (E, E') \mapsto E \otimes_A E'$ muni de la structure de comodule

$$E \otimes E' \xrightarrow{d_E \otimes d_{E'}} A(GL_n) \otimes A(GL_n) \otimes E \otimes E' \xrightarrow{m \otimes id} A(GL_n) \otimes E \otimes E'$$

(où m est la multiplication de l'algèbre de Hopf $A(GL_n)$ induite par la diagonale $\Delta : GL_n \to GL_n \times GL_n$) préserve les suites exactes de A-modules projectifs et induit une structure d'anneau commutatif avec unité sur $R_A(GL_n)$ (l'unité est la classe du $A(GL_n)$-comodule A défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$).

2.2. La donnée d'un $A(GL_n)$-comodule E fournit pour toute A-algèbre A' un $A'[GL_n(A')]$-module par:

$$A'[GL_n(A')] \otimes_A E \xrightarrow{id \otimes d_E} A'[GL_n(A')] \otimes_A A(GL_n) \otimes E \xrightarrow{év \otimes id} A' \otimes_A E$$

où $év : A'[GL_n(A')] \otimes_A A(GL_n) \to A'$ est l'homomorphisme d'évaluation. Par suite, on a des *homomorphismes d'anneaux canoniques*

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \to R_{A'}(GL_n(A')) \; ; \; E \mapsto A' \otimes_A E \, .$$

Remarque. D'une manière générale, si H est une algèbre de Hopf qui est de plus un A-module plat, on notera $R_A(H)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A(H)$ des H-comodules qui sont projectifs de type fini en tant que A-modules. Comme pour $R_A(GL_n)$, on montre que $R_A(H)$ est un anneau commutatif avec unité. Nous utiliserons les algèbres de Hopf

$$A(M_n) = A[X_{11}, ..., X_{nn}], A(T_n)$$
$$= A[X_1, ..., X_n], A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, ..., X_{nn}; Y_{11}, ..., Y_{mm}] ,$$

dont les groupes de Grothendieck $R_A(H)$ s'interprètent comme représentations polynomiales de M_n ($n \times n$ matrices), T_n (matrices diagonales) et $M_n \times M_m$ respectivement.

3. Le pré-λ-anneau $R_A(H)$

Définition 3.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau (λ-ring) R est un anneau commutatif avec unité, muni d'une suite d'opérations $\{\lambda^n\}_{n \geq 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(i) $\lambda^0(x) = 1$ et $\lambda^1(x) = x$

(ii) $\lambda^k(x+y) = \sum_{i=0}^k \lambda^i(x) \cdot \lambda^{k-i}(y)$.

En introduisant les séries formelles $\lambda_t(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i(x) t^i$ et

$$\psi_{-t}(x) = -t \frac{d}{dt}(\log \lambda_t(x)) = -t \left(\frac{d}{dt} \lambda_t(x)\right)(\lambda_t(x))^{-1} ,$$

on définit une suite d'opérations $\psi^k : R \to R, k > 0$ *(opérations d'Adams)* par

$$\psi_{-t}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \psi^i(x) t^i .$$

On vérifie immédiatement que les opérations ψ^k sont des endomorphismes de groupe et que $\psi^1(x) = x$. D'autre part, on tire de la définition la formule [1]:

$$(*)\ \psi^k - \psi^{k-1} \cdot \lambda^1 + \dots + (-1)^{k-1}\psi^1 \cdot \lambda^{k-1} + (-1)^k k\lambda^k = 0$$

qui peut servir de définition par récurrence des opérations d'Adams. Si x est de rang 1, c'est-à-dire $\lambda_t(x) = 1 + xt$, on vérifie par induction sur k à l'aide de la formule (*) que $\psi^k(x) = x^k$.

Si H est une A-algèbre de Hopf qui est de plus un A-module plat, nous allons définir des opérations λ^k sur $R_A(H)$. Soient $E \in \mathscr{P}_A(H)$ et $k \geqslant 1$ entier. On considère la k-ième puissance tensorielle $E^k = E \otimes_A \dots \otimes_A E$ (k facteurs) munie de la structure de H-comodule

$$E \otimes \dots \otimes E \xrightarrow{d_E \otimes \dots \otimes d_E} H \otimes \dots \otimes H \otimes E \otimes \dots \otimes E \xrightarrow{m \otimes id} H$$
$$\otimes E \otimes \dots \otimes E$$

où m est la multiplication de k facteurs dans l'algèbre de Hopf H (si $H = A(GL_n)$, m est induite par la diagonale $\Delta : GL_n \to GL_n \times \dots \times GL_n$). Le sous-module de E^k engendré par les $x_1 \otimes \dots \otimes x_k$ où $x_i = x_j$ pour un $i \neq j$, est muni d'une structure de H-sous-comodule de E^k : si $d_E(x) = \sum c_l \otimes x_l$, $m\ [(d_E \otimes d_E)(x \otimes x)] = m\ [(\sum c_l \otimes x_l) \otimes (\sum c_l \otimes x_l)] = \sum c_i^2 \otimes x_i \otimes x_i + \sum_{r<s} c_r c_s \otimes (x_r \otimes x_s + x_s \otimes x_r)$. Par passage au quotient, on obtient un H-comodule $\lambda^k E$ *(k-ième puissance extérieure)*.

On convient que $\lambda^0 E = A$ (H-comodule trivial défini par $d_A(1) = 1 \otimes 1$). On vérifie que $\lambda^k E \in \mathscr{P}_A(H)$ au moyen de la formule classique sur les A-modules

$$\lambda^k(E \oplus F) \simeq \oplus_{i=0}^k \lambda^i E \otimes \lambda^{k-i} F$$

car il est clair que les puissances extérieures de modules libres sont des modules libres.

Si $1 + R_A(H)\ [[t]]^+$ désigne le groupe multiplicatif des séries formelles sur $R_A(H)$ de terme constant 1, il s'avère que la formule

$$\lambda_t\{E\} = \sum_{i=0}^{\infty} [\lambda^i E]\, t^i$$

sur les générateurs de $R_A(H)$ induit un homomorphisme de groupes

$$\lambda_t :\ R_A(H) \to 1 + R_A(H)[[t]]^+$$

et par suite une structure de pré-λ-anneau sur $R_A(H)$. Le point essentiel de la démonstration est le

LEMME 3.2. *Si* $0 \to V \to W \to V' \to 0$ *est exacte dans* $\mathscr{P}_A(H)$, *alors*

$$[\lambda^k W] = \textstyle\sum_{i=0}^{k} [\lambda^i V] \cdot [\lambda^{k-i} V'] \qquad \textit{dans} \qquad R_A(H)$$

c'est-à-dire $\lambda_t : R_A(H) \to 1 + R_A(H)\,[[t]]^+$ *est bien définie.*

Preuve. Soit $f : W^m \to \lambda^m W$ la projection canonique. En tensorisant la suite $0 \to V \to W \to V' \to 0$ suffisamment de fois par V et W, on obtient une filtration

$$0 \subset V^m \subset V^{m-1} \otimes W \subset \ldots \subset V^i \otimes W^{m-i} \subset \ldots \subset W^m .$$

L'image par f de cette filtration $f(V^i \otimes W^{m-i}) = W_i$ est une filtration du H-comodule $\lambda^m W$ (W_i coïncide avec le sous-module engendré par les $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ ayant au moins i facteurs dans V). On va montrer d'une part que

$$W_i / W_{i+1} \simeq \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V' \text{ (en tant que } H\text{-comodules)}$$

et d'autre part que les W_i sont des objets de $\mathscr{P}_A(H)$. Alors, par définition du produit dans $R_A(H)$, on a

$$[\lambda^i V] \cdot [\lambda^{m-i} V'] = [\lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V']$$

et d'autre part, on aura (en posant $W_{m+1} = 0$)

$$[\lambda^m W] = \textstyle\sum_{i=0}^{m} [W_i / W_{i+1}] .$$

Le lemme suit alors directement de ces considérations. Pour montrer l'isomorphisme $W_i/W_{i+1} \simeq \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$, on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
V^i \otimes W^{m-i} \arrow[rr, "f"] \arrow[d, "p_i"] & & W_i \arrow[d] \\
V^i \otimes V'^{\,m-i} \arrow[rr, "f'"] \arrow[dr] & & W_i / W_{i+1} \\
& \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V' \arrow[ur, "f''"'] &
\end{tikzcd}$$

où p_i est induit par la projection $p : W \twoheadrightarrow V'$.

Il est clair que f induit les homomorphismes de H-comodules f' et f''. Pour vérifier que f'' est un isomorphisme, il suffit de vérifier que f'' est un isomorphisme de A-modules. Mais, en tant que A-modules, $W \simeq V$

$\oplus V'$, donc $\lambda^m W \simeq \oplus_{i=0}^m \lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$, et via cet isomorphisme, W_i / W_{i+1} s'identifie à $\lambda^i V \otimes \lambda^{m-i} V'$.

Enfin, les suites exactes

$$0 \to W_{i+1} \to W_i \to W_i / W_{i+1} \to 0$$

montrent par induction que les W_i sont A-projectifs de type fini pour $i = 0, 1, \ldots, m+1$. $\square$

On déduit immédiatement du lemme 3.2 que les opérations λ^k définissent une structure de pré-λ-anneau sur $R_A(H)$ (donc en particulier sur $R_A(GL_n)$, $R_A(M_n)$, $R_A(T_n)$, $R_A(M_n \times M_n)$ etc.).

Remarques. (1) En suivant exactement la même démarche, on munit les anneaux $R_A(G)$ d'une structure de pré-λ-anneau (λ^k est la k-ième puissance extérieure munie de l'action diagonale de G), naturelle vis-à-vis des homomorphismes de restriction et d'extension des scalaires, et compatibles avec les homomorphismes canoniques définis sous 2.2

$$e_{A'} : R_A(GL_n) \to R_{A'}\big(GL_n(A')\big)$$

(2) Le *dual* $V^* = \mathrm{Hom}_A(V, A)$, muni de l'action de G définie par

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

induit une involution de pré-λ-anneau sur $R_A(G)$. On en déduit des *opérations d'Adams d'indice négatif*

$$\psi^{-k}(x) = \psi^k(x^*) = \big(\psi^k(x)\big)^*, \qquad k > 0 .$$

Ces opérations vérifient aussi la condition $\psi^{-k}[P] = [P]^{-k}$, $k > 0$ sur les éléments de rang 1 (pour autant que la notation $[P]^{-1}$ ait un sens, c'est-à-dire $[P]$ inversible), ce qui justifie leur appellation.

On dit qu'un H-comodule $E \neq 0$ est *simple* s'il ne possède pas de sous-comodule propre; E est dit *semi-simple* s'il est somme directe de sous-comodules simples.

LEMME 3.3. *Si F est un corps, le groupe de Grothendieck $R_F(H)$ s'identifie au groupe abélien libre sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de H-comodules simples.*

Preuve. Comme les espaces vectoriels de dimension finie sont de longueur finie, tout objet de $\mathscr{P}_F(H)$ est a fortiori de longueur finie. Maintenant, comme la catégorie $\mathscr{P}_F(H)$ est abélienne, le théorème de Jordan-Hölder [5] s'applique et le lemme en résulte.

COROLLAIRE 3.4. *Si* k *est un corps de caractéristique nulle, ou bien un corps fini, et* K/k *une extension de corps, alors l'extension des scalaires* $i : R_k(GL_n) \to R_K(GL_n)$ *est injective.*

Preuve. Soient E, E' deux $k(GL_n)$-comodules simples non isomorphes. Au moyen de l'isomorphisme classique:

$$K \otimes_k \mathrm{Hom}_k(E, E') \simeq \mathrm{Hom}_K(K \otimes_k E, K \otimes_k E')$$

On montre que

$$K \otimes \mathrm{Hom}^{k(GL_n)}(E, E') \simeq \mathrm{Hom}^{K(GL_n)}(K \otimes_k E, K \otimes_k E')$$

donc le second membre est nul. D'autre part le comodule $K \otimes_k E$ est semi-simple, car son anneau d'endomorphismes est $K \otimes {}_k D_E$, où D_E est le corps $\mathrm{End}^{K(GL_n)}(E)$, donc semi-simple ([4], l'un des deux corps est séparable sur k en vertu des hypothèses). Alors, la formule $\mathrm{Hom}^{K(GL_n)}$ $(K \otimes_k E, K \otimes_k E') = 0$ montre que $K \otimes {}_k E$ et $K \otimes {}_k E'$ sont sans facteur simple commun. $\square$

LEMME 3.5. *Si* K *est un corps infini, l'homomorphisme canonique défini sous 2.2 :* $e_K : R_K(GL_n) \to R_K(GL_n(K))$ *(envoyant le* $K(GL_n)$*-comodule* E *sur le* $K[GL_n(K)]$*-module associé* E*) est injectif.*

Preuve. En vertu du lemme 3.3, il s'agit de montrer que deux comodules simples non isomorphes ont pour image deux modules simples non isomorphes. Comme $GL_n(K)$ est un ouvert dense de $M_n(K)$ (nxn-matrices) pour la topologie de Zariski, le lemme suit du résultat classique: « Si la fonction polynomiale associée à un polynôme $P(X_1, ..., X_n)$ est identiquement nulle sur un anneau intègre infini, alors le polynôme P est nul. » $\square$

Remarques. (1) Pour un corps algébriquement clos, on peut parler du groupe algébrique $GL_n(K)$ et de l'anneau $R_K^{alg}(GL_n(K))$ des représentations algébriques de $GL_n(K)$. Ce dernier coïncide avec $R_K(GL_n)$.

(2) En exploitant ce point de vue, J.-P. Serre [9] montre en particulier que les homomorphismes d'extension des scalaires:

$i : R_{\mathbf{Z}}(GL_n) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(GL_n)$ et $i' : R_{\mathbf{Z}}(GL_n \times GL_m) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m)$ sont des isomorphismes (il établit en premier lieu une suite exacte

$$\oplus_p R_{\mathbf{F}_p}(H) \xrightarrow{i} R_{\mathbf{Z}}(H) \xrightarrow{j} R_{\mathbf{Q}}(H) \to 0$$

[9, théorème 1] pour toute algèbre de Hopf H, puis il montre la surjectivité des homomorphismes de décomposition

$$d_p: R_{\mathbf{Q}}(GL_n) \to R_{\mathbf{F}_p}(GL_n) \text{ et } d'_p: R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m) \to R_{\mathbf{F}_p}(GL_n \times GL_m).$$

Par construction $j_p o d_p = 0$; il s'ensuit que i et i' sont des isomorphismes [9, théorèmes 3 et 5]).

LEMME 3.6. *Soit p un nombre premier. L'homomorphisme canonique*

$$e_p: R_{\mathbf{F}_p}(GL_n) \to \prod_{m \geq 1} R_{\mathbf{F}_{p^m}}(GL_n(\mathbf{F}_{p^m}))$$

est injectif.

Preuve. Suit du résultat classique « Si la fonction polynomiale associée à un polynôme $P(X_1, \ldots, X_n)$ de degré q est identiquement nulle sur un corps contenant au moins $q + 1$ éléments, alors P est identiquement nul ». ☐

Si A est un anneau de caractéristique $p > 0$, on désignera par Frob l'*homomorphisme de Frobenius* de A défini par $x \mapsto x^P$.

COROLLAIRE 3.7. *Si A est un anneau de caractéristique $p > 0$, alors*

$$\psi^P = \mathrm{Frob}_*: R'_A(G) \to R'_A(G).$$

($R'_A(G)$ désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{L}_A^G$ des AG-modules A-libres de type fini.)

Preuve. Comme tout objet V de $\mathscr{L}_A^G$ est de la forme $V = \rho^*(A_{id}^n)$, il suffit par naturalité de montrer:

$$\psi^P[A_{id}^n] = \mathrm{Frob}_*[A_{id}^n] \in R_A(GL_n(A)).$$

Comme $[A_{id}^n]$ est dans l'image de l'homomorphisme canonique e_A : $R_A(GL_n) \to R_A(GL_n(A))$ de pré-λ-anneaux, il suffit de montrer

$$\psi^P = \mathrm{Frob}_*: R_A(GL_n) \to R_A(GL_n).$$

Par le lemme 3.6, on se réduit encore à montrer

$$\psi^P = \mathrm{Frob}_*: R_{\mathbf{F}_{p^m}}(GL_n(\mathbf{F}_{p^m})) \to R_{\mathbf{F}_{p^m}}(GL_n(\mathbf{F}_{p^m})).$$

Cette dernière égalité s'obtient facilement à partir de [7]. ☐

4. Le théorème fondamental (Splitting principle)

Définition 4.1 [1], [2]. *Un pré-λ-anneau R est un λ-anneau (special λ-ring) si les λ-opérations vérifient les propriétés supplémentaires* [1], *trivialement vérifiées sur les sommes d'éléments de rang 1 :*

(i) $\lambda_t(1) = 1 + t$

(ii) $\lambda^n(xy) = P_n(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^n(x); \lambda^1(y), \ldots, \lambda^n(y))$

(iii) $\lambda^m(\lambda^n(x)) = P_{mn}(\lambda^1(x), \ldots, \lambda^{nm}(x))$

où P_n et P_{mn} sont des polynômes à coefficients entiers (donc définis par leur valeur sur les sommes d'éléments de rang 1). Le sous-ensemble de R vérifiant les formules (ii) et (iii) est fermé pour l'addition [1], [2]. Une forme faible (équivalente si R est sans torsion en tant que groupe abélien) de ces conditions s'exprime aisément en termes d'opérations d'Adams [1], [2]:

(1) $\psi^k : R \to R$ est un endomorphisme d'anneau (et même de λ-anneau)

(2) $\psi^k \circ \psi^l = \psi^l \circ \psi^k = \psi^{kl}$.

Nous désirons montrer que $R_A(G)$ est un λ-anneau. Si $P \in \mathscr{P}_G^A$, P est l'image d'un projecteur dans un AG-module V, A-libre de type fini

$$p^2 = p : V \to V \quad (\operatorname{Im} p = P)$$

(par exemple $V = P \oplus Q$ où Q est un inverse projectif de P muni de la G-action triviale). En choisissant une A-base de V, $p \in M_n(A)$ et, si $\sigma : G \to GL_n(A)$ est de la forme matricielle de V, on a

$$V = \sigma^*(A_{id}^n).$$

De même, si $P' \in \mathscr{P}_A^G$, on peut écrire

$$P' = \operatorname{im}(p' : V' \to V'), \; p'^2 = p' \quad \text{et} \quad V' = \sigma'^*(A_{id}^m).$$

Rappelons que $R_A(M_n \times M_m)$ est le groupe de Grothendieck de la catégorie $\mathscr{P}_A(M_n \times M_m)$ des $A(M_n \times M_m)$-comodules A-projectifs de type fini où $A(M_n \times M_m) = A[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}]$. Comme on l'a vu, $R_A(M_n \times M_m)$ est un pré-λ-anneau. Le fait crucial pour la suite est le

LEMME 4.2. *(p, p') définissent un homomorphisme de pré-λ-anneaux*

$$\alpha(p, p') : R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \to R_A(G)$$

tel que $[P]$, $[P'] \in \alpha(p, p')\, R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$.

Preuve. Si E est un $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$-comodule, on lui associe $e_A(E) = A \otimes_{\mathbf{Z}} E$ muni de l'action canonique de $M_n(A) \times M_m(A)$ définie sous 2.2. Ainsi le couple (p, p') de matrices agit comme un projecteur sur $e_A(E)$. Le A-module projectif image de ce projecteur $(p, p') \cdot e_A(E)$ est muni d'une action du groupe G car

$$\sigma(g) \cdot p = p \cdot \sigma(g) \qquad \text{et} \qquad \sigma'(g) \cdot p' = p' \cdot \sigma'(g')$$

par hypothèse. On pose alors

$$\alpha(p, p')(E) = (p, p') \cdot e_A(E)\,.$$

Maintenant, si $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ est exacte dans $\mathscr{P}_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$, alors

$$0 \to (p, p') \cdot e_A(E') \to (p, p') \cdot e_A(E) \to (p, p') \cdot e_A(E'') \to 0$$

est exacte dans $\mathscr{P}_A^G$ (en tant que A-module, $e_A(E) = e_A(E') \oplus e_A(E'')$ et l'action de (p, p') sur $e_A(E') \oplus e_A(E'')$ est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} (p, p') & * \\ 0 & (p, p') \end{smallmatrix}\right)$). Enfin, par fonctorialité des puissances extérieures,

$$(p, p') \cdot \lambda^k(e_A(E)) = \lambda^k((p, p') \cdot e_A(E))\,.$$

Pour terminer, on remarque que $[P] = \alpha(p, p')\,[\mathbf{Z}^n_{p_1}]$ et $[P'] = \alpha(p, p')\,[\mathbf{Z}^m_{p_2}]$ où $\mathbf{Z}^n_{p_1}$ (resp. $\mathbf{Z}^m_{p_2}$) est le $\mathbf{Z}(M_n \times M_m)$-comodule défini par

$$d_{\mathbf{Z}^n_{p_1}} : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{Z}[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^n \,;\; e_i \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^{n} X_{ji} \otimes e_j$$

$$\text{(resp. } d_{\mathbf{Z}^m_{p_2}} : \mathbf{Z}^m \to \mathbf{Z}[X_{11}, \ldots, X_{nn}; Y_{11}, \ldots, Y_{mm}] \otimes \mathbf{Z}^m \,;$$

$$e_i \mapsto \textstyle\sum_{j=1}^{m} Y_{ji} \otimes e_j)\,. \qquad \square$$

Si F est un corps, on peut, en vertu du lemme 3.3, identifier $R_F(M_n \times M_m)$ au sous-anneau de $R_F(GL_n \times GL_m)$ engendré par les représentations ne faisant intervenir ni $\det(X)^{-1}$, ni $\det(Y)^{-1}$. Par [9, lemme 5], les représentations polynomiales simples de $GL_n \times GL_m$ sur un corps sont classifiées par les poids dominants. Comme la condition de se prolonger à $M_n \times M_m$ (c'est-à-dire de ne faire intervenir ni $\det(X)^{-1}$, ni $\det(Y)^{-1}$) se lit sur les poids, la démonstration de J.-P. Serre [9, théorème 5] passe au cas du monoïde $M_n \times M_m$ et livre que l'homomorphisme d'extension des scalaires:

$$i: R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(M_n \times M_m)$$

est un isomorphisme.

PROPOSITION 4.3. *Le pré-λ-anneau* $R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$ *est un λ-anneau.*

Preuve. Pour établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1, on utilise un résultat de J.-P. Serre [9, théorème 4]:

si $R_A(T_n)$ désigne l'anneau des représentations polynomiales du tore T_n (matrices diagonales) d'algèbre de Hopf $A(T_n) = A[X_1, ..., X_n]$, l'homomorphisme de restriction:

$$R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m) \rightarrowtail R_{\mathbf{Q}}(T_{n+m})$$

est injectif. Donc la composition

$$R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m) \xrightarrow{\sim} R_{\mathbf{Q}}(M_n \times M_m) \rightarrowtail R_{\mathbf{Q}}(GL_n \times GL_m) \rightarrowtail R_{\mathbf{Q}}(T_{n+m})$$

est injective. Or les représentations polynomiales du tore T_{n+m} sont sommes de représentation de rang 1. $\square$

THÉORÈME 4.4. *Le pré-λ-anneau* $R_A(G)$ *est un λ-anneau.*

Preuve. Il suffit d'établir les formules (ii) et (iii) de la définition 4.1 pour des classes $[P]$ et $[Q]$ d'objets de $\mathscr{P}_A^G$ (générateurs additifs de $R_A(G)$). Par le lemme 4.2, on se réduit à vérifier ces formules dans $R_{\mathbf{Z}}(M_n \times M_m)$, ce qu'on a fait à la proposition 4.3. $\square$

PROPOSITION 4.5. *Si* A *est un anneau de caractéristique* $p > 0$, *alors*

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R_A(G) \to R_A(G)$$

Preuve. Comme au théorème 4.4, il suffit de montrer que

$$\psi^p = \mathrm{Frob}_* : R_{\mathbf{F}_p}(M_n) \to R_{\mathbf{F}_p}(M_n).$$

Or, $R_{\mathbf{F}_p}(M_n) \rightarrowtail R_{\mathbf{F}_p}(GL_n)$ est injective, et l'égalité a déjà été établie sur $R_{\mathbf{F}_p}(GL_n)$ au corollaire 3.7. $\square$