

# 1. L'Anneau $\$R_A(G)\$$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# OPÉRATIONS D'ADAMS ET REPRÉSENTATIONS DE GROUPES

par Ch. KRATZER

Si  $A$  est un anneau commutatif, on connaît une certaine famille d'opérations  $\psi^k$ ,  $k$  entier, agissant sur l'anneau  $R_A(G)$  des représentations  $A$ -linéaires d'un groupe  $G$  quelconque, analogues aux opérations introduites par F. Adams en  $K$ -théorie topologique. Dans le cadre des représentations de groupes, ces opérations ont été introduites par R. Swan [10]; la technique (« splitting principle ») utilisée par ce dernier comme par d'autres [3], [8], est inspirée de la topologie et adaptée au cadre des représentations par le biais de la géométrie algébrique. Nous la présentons ici du point de vue universel en étudiant les représentations polynomiales de  $GL_n$ , ce qui permet d'établir en particulier un « splitting principle », de manière très directe à partir de [9]. L'apport de géométrie algébrique est alors la « connaissance » des représentations du groupe algébrique  $GL_n(K)$  sur un corps  $K$  algébriquement clos.

On peut enfin remarquer que lorsque  $A$  est un corps et  $G$  un groupe fini, M. Kervaire [7] a obtenu des propriétés supplémentaires concernant les opérations  $\psi^k$  par des techniques élémentaires, notamment l'extension de corps et la restriction aux sous-groupes.

## 1. L'ANNEAU $R_A(G)$

Soient  $A$  un anneau commutatif avec unité et  $G$  un groupe quelconque (non nécessairement fini). On désigne par  $AG$  l'*algèbre du groupe*  $G$ , c'est-à-dire le  $A$ -module libre de base  $G$ , muni de la multiplication induite par celle de  $G$ . Une *représentation* de  $G$  sur  $A$  est une classe d'isomorphisme de  $AG$ -modules (à gauche),  $A$ -libres de type fini. Le choix d'une  $A$ -base de  $V$  permet d'associer à la classe d'isomorphisme  $\{V\}$  un homomorphisme  $\rho : G \rightarrow GL_n(A)$  unique à conjugaison près. On dit que  $\rho$  est la *forme matricielle* de la représentation. Il est utile de généraliser un peu le concept de représentation et de considérer la sous-catégorie pleine  $\mathcal{P}_A^G$  de la catégorie abélienne des  $AG$ -modules formée des modules qui sont *projectifs de type fini en tant que  $A$ -modules*. On notera  $R_A(G)$  le *groupe de Grothen-*

dieck de  $\mathcal{P}_A^G$  défini comme le quotient du groupe abélien libre  $L$  sur les classes d'isomorphisme  $\{V\}$  d'objets de  $\mathcal{P}_A^G$  par les relations  $\{V\} = \{V'\} + \{V''\}$  associées aux suites exactes  $0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$ . On remarque que le produit tensoriel sur  $A : (V, V') \rightarrow V \otimes_A V'$ , muni de l'action diagonale du groupe  $G$  préserve les suites exactes de  $A$ -modules projectifs et induit par conséquent une structure d'anneau commutatif avec unité sur  $R_A(G)$ .

Si  $\rho : G \rightarrow G'$  est un homomorphisme de groupes,  $\rho$  s'étend en un homomorphisme d'algèbre  $\rho : AG \rightarrow AG'$ , et tout  $AG'$ -module  $V$  devient un  $AG$ -module par  $\lambda \cdot v = \rho(\lambda) \cdot v$ . On en déduit un homomorphisme d'anneaux :

$$\rho^* : R_A(G') \rightarrow R_A(G)$$

dit de restriction. De même, si  $f : A \rightarrow A'$  est un homomorphisme d'anneaux, tout  $AG$ -module  $V$  fournit un  $A'G$ -module  $A' \otimes_A V$ . On obtient ainsi un homomorphisme d'anneaux :

$$f_* : R_A(G) \rightarrow R_{A'}(G)$$

dit d'extension des scalaires. En d'autres termes,  $R_A(G)$  est un foncteur contravariant en  $G$  et covariant en  $A$ .

On définit encore  $IR_A(G)$  l'idéal d'augmentation de  $R_A(G)$ , comme le noyau de l'homomorphisme de restriction  $R_A(G) \rightarrow R_A(1) = K_0(A)$  (scindé par l'homomorphisme de restriction  $\varepsilon : R_A(1) \rightarrow R_A(G)$ ).  $IR_A(G)$  est muni d'une structure de  $K_0(A)$ -algèbre via  $\varepsilon$ .

Remarques. (1) Si  $R'_A(G)$  désigne le groupe de Grothendieck de la catégorie  $\mathcal{L}_A^G$  des  $AG$ -modules  $A$ -libres de type fini, l'inclusion de catégories  $\mathcal{L}_A^G \hookrightarrow \mathcal{P}_A^G$  induit un monomorphisme sur les groupes de Grothendieck

$$i : R'_A(G) \rightarrow R_A(G)$$

(Comme les modules projectifs sont facteurs directs des modules libres, l'assertion suit du critère [6, lemma 1]:

$[M] = [N]$  dans  $R_A(G)$  (resp.  $R'_A(G)$ )  $\Leftrightarrow$  il existe  $U, V, W \in \mathcal{P}_A^G$  (resp.  $\mathcal{L}_A^G$ ) et deux suites exactes

$$0 \rightarrow U \rightarrow M \oplus W \rightarrow V \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow U \rightarrow N \oplus W \rightarrow V \rightarrow 0.$$

On vérifie ensuite aisément que  $i$  induit un isomorphisme sur les idéaux d'augmentation

$$i : IR'_A(G) \xrightarrow{\sim} IR_A(G).$$

Ainsi, la généralisation des modules libres aux modules projectifs se traduit par une structure supplémentaire: l'action de  $K_0(A)$  sur l'idéal d'augmentation.

(2) Si  $V$  est une représentation de  $G$  sur  $A$  de forme matricielle  $\rho : G \rightarrow GL_n(A)$ , on peut considérer  $\rho^* : R_A(GL_n(A)) \rightarrow R_A(G)$  et alors

$$[V] = \rho^* [A_{id}^n]$$

où  $[A_{id}^n]$  est la classe de la représentation  $id : GL_n(A) \rightarrow GL_n(A)$ . De ce point de vue, les groupes  $GL_n(A)$  jouent un rôle universel pour les représentations. Nous allons donc étudier maintenant un type particulier de représentations de  $GL_n(A)$ .

## 2. REPRÉSENTATIONS POLYNOMIALES DE $GL_n$

Soit  $A$  un anneau commutatif avec unité. On considère le foncteur

$$GL_n : \mathcal{A}lg_A \rightarrow \mathcal{G}r ; A' \mapsto GL_n(A')$$

de la catégorie des  $A$ -algèbres commutatives avec unité dans celle des groupes. Une *représentation polynomiale* de  $GL_n$  sur l'anneau  $A$  est une transformation naturelle de foncteurs

$$\rho : GL_n \rightarrow GL_m$$

déterminée par une famille de polynômes  $\rho_{ij}(X_{11}, \dots, X_{mn}, \det(X)^{-1})$  ( $1 \leq i, j \leq m$ ) à coefficients dans  $A$  comme suit:

$$\rho_{A'} : GL_n(A') \rightarrow GL_m(A')$$

est définie par les fonctions polynomiales  $\rho_{ij}$  sur  $A'$ .

*Exemple.* La puissance extérieure  $\lambda^2 : GL_2 \rightarrow GL_1$  est une représentation polynomiale sur  $\mathbf{Z}$  définie par la fonction polynomiale

$$\rho(X_{11}, X_{12}, X_{21}, X_{22}) = X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21}.$$

Comme  $GL_n(A)$  est un groupe algébrique affine, son algèbre affine

$$A(GL_n) = A[X_{11}, \dots, X_{nn}, \det(X)^{-1}]$$

(algèbre des fonctions polynomiales sur  $GL_n$ ) est une *algèbre de Hopf* (la multiplication  $GL_n \times GL_n \rightarrow GL_n$  induit la comultiplication

$$A(GL_n) \rightarrow A(GL_n \times GL_n) = A(GL_n) \otimes A(GL_n).$$