

# 3. Exposants et conducteurs

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Evidemment  $\rho(W_F)$  commute à  $H$  et l'on a  $r \cdot (\pi \circ \rho)(Fr^{mn}) = \pi(\varphi)^{mn} \pi(\varphi_0)^{-mn} = 1_n$ , donc  $r \cdot (\pi \circ \rho)$  est de type galoisien. C.Q.F.D.

2.7 THÉORÈME 2.7. *Toute représentation projective de  $G_F$  (resp.  $W_F$ ) possède un relèvement.*

Ce fait est bien connu pour  $G_F$  [We 2, p. 2]. Ainsi une représentation projective de type galoisien de  $W_F$  a un relèvement de type galoisien.

Pour le cas de  $W_F$  (c'est le théorème 1.4 de l'introduction), l'on utilise le théorème 2.2. On a donc une représentation non-ramifiée  $\rho$  de  $W_F$ , les éléments de  $\rho(W_F)$  commutant à ceux de  $H$ , et telle que  $r \cdot (\pi \circ \rho)$  soit de type galoisien. Il existe un relèvement  $R$  de  $r \cdot (\pi \circ \rho)$ . Mais alors  $\rho$  commute à  $R$ , puisque les éléments de  $\rho(W_F)$  commutent entre eux et à ceux de  $H$ . La représentation  $R \cdot \rho^{-1}$  est un relèvement de  $r$ . C.Q.F.D

### 3. EXPOSANTS ET CONDUCTEURS

3.1 Si  $R$  est une représentation linéaire de  $W_F$ , on peut définir, à l'aide de la distribution de Herbrand [We 1, App. I] l'exposant de son conducteur d'Artin, appelé plus brièvement *exposant de  $R$* , et noté  $a(R)$ . Si  $R$  se factorise à travers le groupe fini  $G = \text{Gal}(K/F)$ , c'est aussi l'exposant, défini dans [Se, p. 107], de la représentation de  $G$  que  $R$  détermine. Cet exposant ne dépend que de la restriction de  $R$  à  $I_F$ . Pour une représentation non-ramifiée  $\rho$ , on a  $a(\rho) = 0$ , et si  $\rho$  commute à  $R$ , on a  $a(R) = a(R \cdot \rho)$ .

3.2 L'on peut définir, comme dans [Se, p. 83, Rem. 1], les sous-groupes  $W_F^u$  de  $W_F$  pour  $u \in \mathbf{R}$ ,  $u \geq -1$ : ce sont les sous-groupes de ramification de  $W_F$  en numérotation supérieure. Si  $G = \text{Gal}(K/F)$  est un quotient fini  $W_F/W_K$  de  $W_F$ , on a  $G^u = W_K W_F^u/W_K$ . On a  $W_F^{-1} = W_F$ , le groupe  $W_F^0$  est le groupe d'inertie  $I_F$  et le groupe d'inertie sauvage  $P_F$  est la fermeture de l'union des  $W_F^\varepsilon$  pour  $\varepsilon > 0$ .

Si  $K$  est une extension galoisienne finie de  $F$  et  $G$  son groupe de Galois sur  $F$ , nous poserons

$$\alpha(K/F) = \sup \{ u \mid G^u \neq 1 \} \quad \text{et} \quad \beta(K/F) = \sup \{ v \mid G_v \neq 1 \}.$$

On a

$$\beta(K/F) = \psi_{K/F}(\alpha(K/F)) \quad \text{et} \quad \alpha(K/F) = \varphi_{K/F}(\beta(K/F))$$

où  $\varphi_{K/F}$  et  $\psi_{K/F}$  sont les fonctions de Herbrand [Se, p. 80].

3.3 Soit  $R$  une représentation linéaire de  $W_F$ . Si  $R$  est triviale, posons  $\alpha(R) = 0$ . Sinon, nous noterons  $\alpha(R)$  le plus grand indice  $u$  tel que l'image de  $R(W_F^u)$  soit non-triviale. Un tel  $\alpha(R)$  est bien défini: si  $R$  est non-ramifiée, on a  $R(W_F) \neq 1$  et  $R(W_F^\varepsilon) = 1$  pour  $\varepsilon > -1$ , d'où  $\alpha(R) = -1$ . Si  $R$  est ramifiée, prenons une représentation non ramifiée  $\rho$ , commutant à  $R$ , et telle que  $R \cdot \rho$  soit galoisienne. Soit  $K$  le corps fixé par le noyau de  $R \cdot \rho$ . Alors  $\alpha(R \cdot \rho)$  existe et vaut  $\alpha(K/F)$ . Mais il est clair que pour  $u > -1$ , on a  $R \cdot \rho(W_F^u) = R(W_F^u)$ . Ainsi  $\alpha(R)$  est défini et vaut  $\alpha(K/F)$ .

3.4 Il est bien connu que si  $\chi$  est un caractère de  $W_F$ , alors on a

$$a(\chi) = \alpha(\chi) + 1 \quad [\text{Se, p. 109, prop. 5}].$$

Nous voulons généraliser cette formule. Nous dirons qu'une représentation linéaire  $R$  de  $W_F$  possède la propriété  $A$  si la restriction de  $R$  à  $W_F^{\alpha(R)}$  est sans point fixe non-trivial.

Il est clair qu'une représentation irréductible  $R$  vérifie la propriété  $A$ : en effet, comme  $W_F^{\alpha(R)}$  est invariant dans  $W_F$ , la restriction de  $R$  à  $W_F^{\alpha(R)}$  a des composantes irréductibles conjuguées entre elles; cette restriction étant non-triviale, aucune composante ne peut être triviale.

3.5 La proposition suivante est une traduction de [Se, p. 108, Cor. 1]:

PROPOSITION 3.5. Soit  $R$  une représentation linéaire de  $W_F$  se factorisant par le groupe fini  $G = \text{Gal}(K/F)$ . Alors on a

$$a(R) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{v=0}^{\infty} |G_v| \text{codim}(V^{G_v}),$$

où  $V^{G_v}$  désigne l'espace des points fixes par le groupe  $G_v$ .

THÉORÈME 3.5. Soit  $R$  une représentation linéaire de degré  $n$  de  $W_F$ , vérifiant la propriété  $A$ . Alors on a  $a(R) = n(\alpha(R) + 1)$ .<sup>1)</sup>

Démonstration. C'est clair si  $R$  est non-ramifiée. Si  $R$  est ramifiée, on peut, par le théorème 2.2, se ramener à  $R$  de type galoisien se factorisant par le groupe fini  $G = \text{Gal}(K/F)$ .

Alors

$$a(R) = \frac{1}{|G_o|} \sum_{v=0}^{\beta} \text{codim}(V^{G_v}) \cdot |G_v|,$$

<sup>1)</sup> Cette formule avait été signalée, sans démonstration, dans une prépublication de R. Howe.

où  $\beta = \beta(K/F)$ . Mais on a  $G_\beta = W_F^{\alpha(R)} \cdot W_K/W_K$  et  $R$  vérifie la propriété  $A$ . Par suite on a  $\dim V^{G_\beta} = 0$  et aussi  $\dim V^{G_v} = 0$  pour  $v \leq \beta$ . On a donc

$$a(R) = n \sum_{v=0}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} = n \left( 1 + \sum_{v=1}^{\beta} \frac{|G_v|}{|G_o|} \right) = n(1 + \alpha(K/F)),$$

d'où  $a(R) = n(1 + \alpha(R))$ . C.Q.F.D.

3.6 COROLLAIRE 1. Soient  $R$  et  $S$  deux représentations linéaires de  $W$  de degrés  $n$  et  $m$  respectivement. Supposons que  $R, S$  et  $R \otimes S$  vérifient la propriété  $A$ . Alors on a  $a(R \otimes S) \leq \sup(ma(R), na(S))$  avec égalité si  $ma(R) \neq na(S)$ .

Rappelons qu'une représentation linéaire est dite *primordiale* si l'on ne peut abaisser son exposant en la tordant par un caractère. Le corollaire 2 implique immédiatement le théorème 1.5.

COROLLAIRE 2. Soit  $R$  une représentation linéaire de  $W_F$ , primordiale, de degré  $n$ , et vérifiant la propriété  $A$ . Soit  $\chi$  un caractère de  $W_F$ . Alors on a  $a(R \otimes \chi) = \sup(a(R), na(\chi))$ .

3.7 Démonstration des corollaires. Le théorème 3.5 nous permet d'écrire

$$\alpha(R) + 1 = \frac{a(R)}{n} \quad \text{et} \quad \alpha(S) + 1 = \frac{a(S)}{m}.$$

Mais il est clair que l'on a  $\alpha(R \otimes S) \leq \sup(\alpha(R), \alpha(S))$ , avec l'égalité si  $\alpha(R) \neq \alpha(S)$ . On en déduit le corollaire 1. Prenant  $S = \chi$ , on obtient le corollaire 2, puisque, par hypothèse, on a toujours  $a(R \otimes \chi) \geq a(R)$ . C.Q.F.D.

Une conséquence immédiate du corollaire 2 est la remarque suivante:

*Remarque 3.7.* Soit  $R$  une représentation linéaire de  $W_F$ , irréductible et de degré  $n$ . Si  $a(R)$  n'est pas multiple de  $n$ ,  $R$  est primordiale.

#### 4. CARACTÈRES CENTRIQUES

4.1 *Rappel et notations.* Si  $L$  est une extension finie de  $F$ , nous noterons  $\tau_L : W_L \rightarrow L^\times$  l'application de *réciprocité* définie par la théorie du corps de classes local. On sait qu'elle donne une bijection entre les caractères de  $L^\times$  et ceux de  $W_L$ , par la formule  $\chi \rightarrow \chi \circ \tau_L$ .