Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: REPRÉSENTATIONS DU GROUPE DE WEIL D'UN CORPS LOCAL
Autor: Henniart, Guy
Kapitel: 6. Minorations d'exposants
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51064

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

6. Minorations d'exposants

6.1 Dans ce chapitre, nous démontrerons le théorème 1.8. Nous conservons les notations précédentes et supposons de plus r primitive. Il nous faut rappeler brièvement quelques résultats de [Ko].

Nous avons déjà dit que r_1 est irréductible; ceci entraîne que le degré n de r est une puissance de la caractéristique résiduelle p de F, disons $n = p^d$, $d \geqslant 1$. Le degré de K sur F_1 est alors p^{2d} et l'on démontre que le groupe $V = G_1 = \mathrm{Gal}\,(K/F_1)$ est un groupe abélien d'exposant p; on peut donc le considérer comme un espace vectoriel de dimension $2d$ sur le corps fini $\mathbf{F}_p$ à p éléments.

6.2 Sur cet espace vectoriel, r_1 définit une forme symplectique f, à valeurs dans μ_p, le groupe des racines de l'unité d'ordre p dans $\mathbf{C}^x$, autrement dit, f est une application bilinéaire alternée de $V \times V$ dans μ_p, μ_p étant considéré de façon évidente comme un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_p$.

Pour définir f, prenons un relèvement R_1 de r_1. Si a (resp. b) est un élément de V, prenons un représentant $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) de a (resp. b) dans W_{F_1}. Alors $R_1\,(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ s'écrit sous la forme $f\,(a, b)\,1_{p^d}$, où 1_{p^d} est la matrice d'unité d'ordre p^d: en effet, $r_1\,(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ est trivial. H. Koch montre que l'on a $f\,(a, b) \in \mu_p$ et que f est symplectique.

Le fait que r_1 soit *irréductible* équivaut au fait que f soit non-dégénérée.

Le groupe $G = \mathrm{Gal}\,(K/F)$ agit par conjugaison sur V en respectant la forme symplectique f. Cette action se factorise en fait par $\mathrm{Gal}\,(F_1/F)$. On peut exprimer le fait que r est *primitive*, en disant que V ne contient aucun sous-module sur G qui soit totalement isotrope.

6.3 L'on peut facilement construire des relèvements de r_1. Soit X un sous-espace lagrangien de V, i.e. un sous-espace totalement isotrope maximal. Soit E l'extension de F_1 fixée par X. On a alors $[K : E] = [E : F_1] = p^d$ et il existe un caractère χ de W_F tel que la représentation induite de χ à W_{F_1} relève r_1.

Inversement, si E est une extension de F_1 telle qu'un caractère de W_E induise un relèvement de r_1, alors E est incluse dans K et $X = \mathrm{Gal}\,(K/E)$ est un sous-espace lagrangien de V. De plus, tout relèvement de r_1 est induit à partir de W_E.

6.4 L'on peut donner une condition *nécessaire* (et suffisante si $d = 1$) pour que le caractère χ de W_E induise à W_{F_1} un relèvement de r_1.

Posons $H = V/X = \mathrm{Gal}\,(E/F_1)$. Soit s un élément de H. Définissons le caractère λ_s de W_E de la façon suivante: si $x \in W_E$, on note $\pi_X\,(x)$ sa projection dans X, et on appelle $\bar{s}$ un représentant quelconque de s dans V. Alors λ_s est donné par la formule suivante:

$$\lambda_s(x) = f\left(\bar{s}, \pi_X(x)\right) \quad \text{pour} \quad x \in W_E\ .$$

On vérifie facilement que l'application $s \mapsto \lambda_s$ est un homomorphisme de H dans le groupe des caractères de W_E triviaux sur W_K. De plus, comme K est une extension abélienne de F_1, H agit trivialement (par conjugaison) sur W_E/W_K, et λ_s est invariant par H.

Remarques. 1) f étant non-dégénérée, le caractère λ_s est non-trivial pour $s \in H$, $s \neq 1$.

2) E étant galoisienne sur F_1, le groupe H agit sur les caractères de W_E par $\chi^s\,(x) = \chi\,(\sigma x \sigma^{-1})$, où σ est un représentant dans W_{F_1} de l'élément s de H.

PROPOSITION 6.4. *Soit χ un sous-espace lagrangien de V fixant le corps E. Soit χ un caractère de W_E. Si χ induit à W_{F_1} un relèvement de r_1, l'on a $\chi^{s-1} = \lambda_s$ pour tout élément s de H. Si $d = 1$, cette dernière condition est suffisante pour que χ induise un relèvement de r_1.*

6.5 *Démonstration.* Montrons d'abord la nécessité de la condition: posons $\rho = \mathrm{Ind}_{W_F}^{W_{F_1}}\chi$. Si $s \in H$ et $x \in W_E$, on a

$$\chi^{s-1}(x) = \chi\,(\sigma x\, \sigma^{-1}\, x^{-1})\,,$$

où σ est un représentant (quelconque) de s dans W_{F_1}.

Mais comme le commutateur $\sigma\, x\, \sigma^{-1}\, x^{-1}$ est dans W_K, la matrice $\rho\,(\sigma x\, \sigma^{-1}\, x^{-1})$ est la matrice scalaire

$$\chi\,(\sigma\, x\, \sigma^{-1} x^{-1})\,.\,1_{p^d}\,.$$

Par suite, si $\bar{s}$ est l'image de σ dans V, on a:

$$\chi^{s-1}(x) = f\left(\bar{s}, \pi_X(x)\right) = \lambda_s(x) \qquad \text{i.e. } \chi^{s-1} = \lambda_s\,.$$

Si $d = 1$, E est une extension cyclique de F, de degré premier, et il existe un caractère χ_o de W_E tel que χ_o induise un relèvement de r_1. On a donc $\chi_o^{s-1} = \lambda_s$. Mais il résulte de [Bu, p. 33] que le caractère χ de W_E induit un relèvement de r_1 si et seulement si on a $\chi^{s-1} = \chi_o^{s-1}$, i.e. $\chi^{s-1} = \lambda_s$.

On a démontré la proposition 6.4.

6.6 *Le théorème* 1.8 de l'introduction dit que l'exposant de r vérifie l'inégalité

$$a(r) \geqslant p^d + (p^d+1)\,\alpha(K/F)\,, \quad \text{avec égalité si} \quad d = 1\,.$$

On a noté en 5.3 l'égalité $e\,a(r) = p^d(e-1) + a(r_1)$. Le lecteur vérifiera sans peine que l'on a en outre $\alpha(K/F_1) = e\,\alpha(K/F)$. Il nous suffit donc de démontrer l'inégalité

$$a(r_1) \geqslant p^d + (p^d+1)\,\alpha(K/F_1)\,, \quad \text{avec égalité si} \quad d = 1\,.$$

Remarquons que le théorème de Hasse-Arf appliqué à l'extension abélienne K de F_1 nous dit que $\alpha(K/F_1)$ est un entier.

6.7 Prenons donc un sous-espace lagrangien X de V, fixant l'extension E de F_1, et choisissons un caractère χ de W_F qui induise à W_{F_1} un relèvement ρ de r_1.

Soit s un élément non-trivial de $H = \mathrm{Gal}(E/F_1)$. Alors $\chi^{s-1} = \lambda_s$ définit une extension E_s de E, contenue dans K, totalement (et sauvagement) ramifiée de degré p sur E: en effet, la restriction de ρ à W_E est somme des caractères χ^s pour $s \in H$. Comme ρ est irréductible, ces caractères sont tous distincts et χ^{s-1} est non-trivial. Comme l'image par ρ de W_K est formée de matrices scalaires, χ^{s-1} est trivial sur W_K. Par suite l'extension E_s de E fixée par $\mathrm{Ker}(\chi^{s-1})$ est contenue dans K, cyclique sur E, donc de degré p sur E.

Nous noterons L_s le corps des invariants de s dans E d'où $[E : L_s] = p$. Le groupe de Galois de E sur L_s est le groupe H_s engendré par s. Celui de K sur L_s est l'image réciproque V_s dans V, du sous-espace H_s de H. Celui de K sur E_s est l'orthogonal $V_s^{\perp}$ de V_s. Enfin, celui de E_s sur E est $X/V_s^{\perp}$.

6.8 Le caractère χ de W_E induit à W_{L_1} une représentation irréductible de degré p de W_{L_s}. La représentation projective correspondante a pour noyau W_{E_s}, comme il est facile de le vérifier. Soit a_s l'exposant du conducteur de E_s sur E:

$$a_s = a(\chi^{s-1}) = a(\lambda_s)\,.$$

La proposition 3 de [Bu, p. 31] peut alors se traduire en l'inégalité $a(\chi) \geqslant a_s + \beta(E/L_s)$.

Si $d = 1$ cette valeur $a_s + \beta(E/L_s)$ est d'ailleurs exactement la valeur minimale des $a(\chi)$, où χ parcourt les caractères de W_E induisant un relèvement de r_1.

Choisissant bien le sous-espace lagrangien X, nous essaierons d'évaluer a_s et $\beta(E/L_s)$.

6.9 Rappelons que $\alpha(K/F_1)$ est le plus grand indice $m \geqslant 0$ tel que le sous-groupe de ramification V^m de V soit non nul. Mais le groupe Gal (F_1/F) agit par conjugaison sur V_1 en respectant la forme symplectique f associée à r, et les V^m sont des sous-modules de V pour cette action. Mais l'on sait que V ne possède pas de sous-module totalement isotrope non-trivial.

On en déduit d'abord que la restriction de f à V^m est non-dégénérée si V^m est non-trivial, et aussi que si V^m est non-trivial, V^m n'est pas inclus dans X; l'image de V^m dans $H = V/X$, qui est égale à H^m, est alors non-triviale. On a donc démontré la propriété suivante:

LEMME 6.9. *On a* $\alpha(K/F_1) = \alpha(E/F_1)$.

6.10 Il nous faut maintenant choisir convenablement l'espace lagrangien X.

Commençons par prendre un sous-espace lagrangien $\tilde{X}$ de $V_{\beta(K/F_1)} = V^{\alpha(K/F_1)}$. Prolongeons $\tilde{X}$ en un sous-espace lagrangien $\tilde{X}$ de V. Alors on a $\tilde{X} = X_{\beta(K/F_1)}$ et si E est l'extension fixée par X, on a $\beta(K/E) = \beta(K/F_1)$.

Choisissons deux éléments $\bar{s}$ et $\bar{s}_1$ de $V_{\beta(K/F_1)}$ et $X_{\beta(K/F_1)}$ respectivement, de façon que l'on ait $f(\bar{s}, \bar{s}_1) \neq 1$. Alors $\bar{s}$ définit un élément s non-trivial de $H = V/X$.

Soit E_s le corps fixé par l'orthogonal de $\bar{s}$ dans X. L'image s_1 de $\bar{s}_1$ dans Gal (E_s/E) engendre ce groupe. Mais $\bar{s}_1$ appartient à $X_{\beta(K/E)} = X^{\alpha(K/E)}$. Si donc on appelle Y le groupe Gal (E_s/E), les groupes de ramification de Y en numérotation supérieure sont $Y^i = Y$ pour $0 \leqslant i \leqslant \alpha(K/E)$ et $Y^i = 1$ pour $i > \alpha(K/E)$.

Mais

$$\alpha(K/E) = \varphi_{K/E}(\beta(K/E)) = \varphi_{K/E}(\beta(K/F_1)) = \varphi_{K/E}\psi_{K/F_1}(\alpha(K/F_1))$$

$$\alpha(K/E) = \varphi_{K/E} \circ \psi_{K/E} \circ \psi_{E/F_1}(\alpha(K/F_1)) = \psi_{E/F_1}(\alpha(K/F_1)).$$

Par suite, le conducteur de E_s sur E est

$$\alpha(K/E) + 1 \geqslant \alpha(K/F_1) + 1.$$

Remarque. S'il n'y a qu'un seul saut dans la ramification de V (i.e. si $V = V_{\beta(K/F_1)}$ alors on a $\alpha(K/E) = \alpha(K/F_1)$ comme le lecteur le vérifiera

aisément. C'est le cas en particulier si $d = 1$ et plus généralement si V est un module irréductible sur Gal (F_1/F).

6.11 On a ainsi obtenu l'inégalité

$$a(\chi) \geqslant \beta(E/L_s) + \alpha(K/F_1) + 1\,,$$

où L_s est le corps fixé par s dans E. Mais s est un élément de $H^{\alpha(K/F_1)} = H^{\alpha(K/F_1)} = H_{\beta(E/F_1)}$. Par conséquent, on a $\beta(E/L_s) = \beta(E/F_1)$.

D'après le théorème donnant le conducteur d'une représentation induite [Se, p. 109, Cor.], on a

$$a(\rho) = d(E/F_1) + a(\chi)$$

donc

$$a(\rho) \geqslant d(E/F_1) + \beta(E/F_1) + 1 + \alpha(K/F_1)$$

$$a(\rho) \geqslant p^d\big(\alpha(K/F_1)+1\big) + \alpha(K/F_1)\,. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour $d = 1$, la remarque de 6.10 et la proposition 3 de [Bu, p. 31] donnent l'égalité

$$a(r) = p^d\big(\alpha(K/F_1)+1\big) + \alpha(K/F_1)\,.$$

6.12 Supposons que le groupe V soit un module irréductible pour l'action de Gal (F_1/F). A-t-on alors l'égalité dans le théorème 1.8 ? Cette question reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] BOREL, A. Formes automorphes et séries de Dirichlet. *Séminaire Bourbaki*, 1974/75, n° 466, pp. 1-34.

[Bu] BUHLER, J. *Icosaedral Galois Representations*. Lecture Notes in Math. n° 654, Springer, Berlin 1978.

[Ca] CARTIER, P. La conjecture de Langlands dans le cas 2-adique. *Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes*, Université de Paris VII, 1977.

[Co] *Automorphic forms, representations and L-functions*. A.M.S. Summer Institute, Corvallis, juillet 1977 (à paraître).

[De] DELIGNE, P. Les constantes des équations fonctionnelles. *Modular functions of one variable II*. Lectures Notes in Math. n° 349, Springer, Berlin, 1973.

[Ge] GÉRARDIN, P. Facteurs locaux des algèbres simples de rang 4. *Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes*, Université de Paris VII, 1977 (paru dans le n° 1 des publications mathématiques de l'Université de Paris VII).

[He] HENNIART, G. *Représentations du groupe de Weil d'un corps local*. Thèse de 3e cycle, à paraître aux publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud.