6. Minorations d'exposants

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

6. Minorations d'exposants

6.1 Dans ce chapitre, nous démontrerons le théorème 1.8. Nous conservons les notations précédentes et supposons de plus r primitive. Il nous faut rappeler brièvement quelques résultats de [Ko].

Nous avons déjà dit que r_1 est irréductible; ceci entraîne que le degré n de r est une puissance de la caractéristique résiduelle p de F, disons $n = p^d$, $d \geqslant 1$. Le degré de K sur F_1 est alors p^{2d} et l'on démontre que le groupe $V = G_1 = \mathrm{Gal}\,(K/F_1)$ est un groupe abélien d'exposant p; on peut donc le considérer comme un espace vectoriel de dimension $2d$ sur le corps fini $\mathbf{F}_p$ à p éléments.

6.2 Sur cet espace vectoriel, r_1 définit une forme symplectique f, à valeurs dans μ_p, le groupe des racines de l'unité d'ordre p dans $\mathbf{C}^{\times}$, autrement dit, f est une application bilinéaire alternée de $V \times V$ dans μ_p, μ_p étant considéré de façon évidente comme un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_p$.

Pour définir f, prenons un relèvement R_1 de r_1. Si a (resp. b) est un élément de V, prenons un représentant $\bar{a}$ (resp. $\bar{b}$) de a (resp. b) dans W_{F_1}. Alors $R_1\,(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ s'écrit sous la forme $f\,(a, b)\,1_{p^d}$, où 1_{p^d} est la matrice d'unité d'ordre p^d: en effet, $r_1\,(\bar{a}\bar{b}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1})$ est trivial. H. Koch montre que l'on a $f\,(a, b) \in \mu_p$ et que f est symplectique.

Le fait que r_1 soit *irréductible* équivaut au fait que f soit non-dégénérée.

Le groupe $G = \mathrm{Gal}\,(K/F)$ agit par conjugaison sur V en respectant la forme symplectique f. Cette action se factorise en fait par $\mathrm{Gal}\,(F_1/F)$. On peut exprimer le fait que r est *primitive*, en disant que V ne contient aucun sous-module sur G qui soit totalement isotrope.

6.3 L'on peut facilement construire des relèvements de r_1. Soit X un sous-espace lagrangien de V, i.e. un sous-espace totalement isotrope maximal. Soit E l'extension de F_1 fixée par X. On a alors $[K : E] = [E : F_1] = p^d$ et il existe un caractère χ de W_F tel que la représentation induite de χ à W_{F_1} relève r_1.

Inversement, si E est une extension de F_1 telle qu'un caractère de W_E induise un relèvement de r_1, alors E est incluse dans K et $X = \mathrm{Gal}\,(K/E)$ est un sous-espace lagrangien de V. De plus, tout relèvement de r_1 est induit à partir de W_E.

6.4 L'on peut donner une condition *nécessaire* (et suffisante si $d = 1$) pour que le caractère χ de W_E induise à W_{F_1} un relèvement de r_1.

Posons $H = V/X = \mathrm{Gal}(E/F_1)$. Soit s un élément de H. Définissons le caractère λ_s de W_E de la façon suivante: si $x \in W_E$, on note $\pi_X(x)$ sa projection dans X, et on appelle $\bar{s}$ un représentant quelconque de s dans V. Alors λ_s est donné par la formule suivante:

$$\lambda_s(x) = f(\bar{s}, \pi_X(x)) \qquad \text{pour} \qquad x \in W_E \ .$$

On vérifie facilement que l'application $s \mapsto \lambda_s$ est un homomorphisme de H dans le groupe des caractères de W_E triviaux sur W_K. De plus, comme K est une extension abélienne de F_1, H agit trivialement (par conjugaison) sur W_E/W_K, et λ_s est invariant par H.

Remarques. 1) f étant non-dégénérée, le caractère λ_s est non-trivial pour $s \in H$, $s \neq 1$.

2) E étant galoisienne sur F_1, le groupe H agit sur les caractères de W_E par $\chi^s(x) = \chi(\sigma x \sigma^{-1})$, où σ est un représentant dans W_{F_1} de l'élément s de H.

PROPOSITION 6.4. *Soit χ un sous-espace lagrangien de V fixant le corps E. Soit χ un caractère de W_E. Si χ induit à W_{F_1} un relèvement de r_1, l'on a $\chi^{s-1} = \lambda_s$ pour tout élément s de H. Si $d = 1$, cette dernière condition est suffisante pour que χ induise un relèvement de r_1.*

6.5 *Démonstration.* Montrons d'abord la nécessité de la condition: posons $\rho = \mathrm{Ind}_{W_F}^{W_{F_1}} \chi$. Si $s \in H$ et $x \in W_E$, on a

$$\chi^{s-1}(x) = \chi(\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}) \, ,$$

où σ est un représentant (quelconque) de s dans W_{F_1}.

Mais comme le commutateur $\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}$ est dans W_K, la matrice $\rho(\sigma x \sigma^{-1} x^{-1})$ est la matrice scalaire

$$\chi(\sigma x \sigma^{-1} x^{-1}) \, . \, 1_{p^d} \, .$$

Par suite, si $\bar{s}$ est l'image de σ dans V, on a:

$$\chi^{s-1}(x) = f(\bar{s}, \pi_X(x)) = \lambda_s(x) \qquad \text{i.e. } \chi^{s-1} = \lambda_s \, .$$

Si $d = 1$, E est une extension cyclique de F, de degré premier, et il existe un caractère χ_o de W_E tel que χ_o induise un relèvement de r_1. On a donc $\chi_o^{s-1} = \lambda_s$. Mais il résulte de [Bu, p. 33] que le caractère χ de W_E induit un relèvement de r_1 si et seulement si on a $\chi^{s-1} = \chi_o^{s-1}$, i.e. $\chi^{s-1} = \lambda_s$.

On a démontré la proposition 6.4.

6.6 *Le théorème* 1.8 de l'introduction dit que l'exposant de r vérifie l'inégalité

$$a(r) \geqslant p^d + (p^d + 1)\,\alpha(K/F)\,, \quad \text{avec égalité si} \quad d = 1\,.$$

On a noté en 5.3 l'égalité $e\,a(r) = p^d(e-1) + a(r_1)$. Le lecteur vérifiera sans peine que l'on a en outre $\alpha(K/F_1) = e\,\alpha(K/F)$. Il nous suffit donc de démontrer l'inégalité

$$a(r_1) \geqslant p^d + (p^d + 1)\,\alpha(K/F_1)\,, \quad \text{avec égalité si} \quad d = 1\,.$$

Remarquons que le théorème de Hasse-Arf appliqué à l'extension abélienne K de F_1 nous dit que $\alpha(K/F_1)$ est un entier.

6.7 Prenons donc un sous-espace lagrangien X de V, fixant l'extension E de F_1, et choisissons un caractère χ de W_F qui induise à W_{F_1} un relèvement ρ de r_1.

Soit s un élément non-trivial de $H = \mathrm{Gal}(E/F_1)$. Alors $\chi^{s-1} = \lambda_s$ définit une extension E_s de E, contenue dans K, totalement (et sauvagement) ramifiée de degré p sur E: en effet, la restriction de ρ à W_E est somme des caractères χ^s pour $s \in H$. Comme ρ est irréductible, ces caractères sont tous distincts et χ^{s-1} est non-trivial. Comme l'image par ρ de W_K est formée de matrices scalaires, χ^{s-1} est trivial sur W_K. Par suite l'extension E_s de E fixée par $\mathrm{Ker}(\chi^{s-1})$ est contenue dans K, cyclique sur E, donc de degré p sur E.

Nous noterons L_s le corps des invariants de s dans E d'où $[E : L_s] = p$. Le groupe de Galois de E sur L_s est le groupe H_s engendré par s. Celui de K sur L_s est l'image réciproque V_s dans V, du sous-espace H_s de H. Celui de K sur E_s est l'orthogonal $V_s^{\perp}$ de V_s. Enfin, celui de E_s sur E est $X/V_s^{\perp}$.

6.8 Le caractère χ de W_E induit à W_{L_1} une représentation irréductible de degré p de W_{L_s}. La représentation projective correspondante a pour noyau W_{E_s}, comme il est facile de le vérifier. Soit a_s l'exposant du conducteur de E_s sur E:

$$a_s = a(\chi^{s-1}) = a(\lambda_s)\,.$$

La proposition 3 de [Bu, p. 31] peut alors se traduire en l'inégalité $a(\chi) \geqslant a_s + \beta(E/L_s)$.

Si $d = 1$ cette valeur $a_s + \beta(E/L_s)$ est d'ailleurs exactement la valeur minimale des $a(\chi)$, où χ parcourt les caractères de W_E induisant un relèvement de r_1.

Choisissant bien le sous-espace lagrangien X, nous essaierons d'évaluer a_s et $\beta(E/L_s)$.

6.9 Rappelons que $\alpha(K/F_1)$ est le plus grand indice $m \geqslant 0$ tel que le sous-groupe de ramification V^m de V soit non nul. Mais le groupe Gal (F_1/F) agit par conjugaison sur V_1 en respectant la forme symplectique f associée à r, et les V^m sont des sous-modules de V pour cette action. Mais l'on sait que V ne possède pas de sous-module totalement isotrope non-trivial.

On en déduit d'abord que la restriction de f à V^m est non-dégénérée si V^m est non-trivial, et aussi que si V^m est non-trivial, V^m n'est pas inclus dans X; l'image de V^m dans $H = V/X$, qui est égale à H^m, est alors non-triviale. On a donc démontré la propriété suivante:

LEMME 6.9. *On a* $\alpha(K/F_1) = \alpha(E/F_1)$.

6.10 Il nous faut maintenant choisir convenablement l'espace lagrangien X.

Commençons par prendre un sous-espace lagrangien $\tilde{X}$ de $V_{\beta(K/F_1)} = V^{\alpha(K/F_1)}$. Prolongeons $\tilde{X}$ en un sous-espace lagrangien $\tilde{X}$ de V. Alors on a $\tilde{X} = X_{\beta(K/F_1)}$ et si E est l'extension fixée par X, on a $\beta(K/E) = \beta(K/F_1)$.

Choisissons deux éléments $\bar{s}$ et $\bar{s}_1$ de $V_{\beta(K/F_1)}$ et $X_{\beta(K/F_1)}$ respectivement, de façon que l'on ait $f(\bar{s}, \bar{s}_1) \neq 1$. Alors $\bar{s}$ définit un élément s non-trivial de $H = V/X$.

Soit E_s le corps fixé par l'orthogonal de $\bar{s}$ dans X. L'image s_1 de $\bar{s}_1$ dans Gal(E_s/E) engendre ce groupe. Mais $\bar{s}_1$ appartient à $X_{\beta(K/E)} = X^{\alpha(K/E)}$. Si donc on appelle Y le groupe Gal(E_s/E), les groupes de ramification de Y en numérotation supérieure sont $Y^i = Y$ pour $0 \leqslant i \leqslant \alpha(K/E)$ et $Y^i = 1$ pour $i > \alpha(K/E)$.

Mais

$$\alpha(K/E) = \varphi_{K/E}\big(\beta(K/E)\big) = \varphi_{K/E}\big(\beta(K/F_1)\big) = \varphi_{K/E}\psi_{K/F_1}\big(\alpha(K/F_1)\big)$$

$$\alpha(K/E) = \varphi_{K/E}\circ\psi_{K/E}\circ\psi_{E/F_1}\big(\alpha(K/F_1)\big) = \psi_{E/F_1}\big(\alpha(K/F_1)\big).$$

Par suite, le conducteur de E_s sur E est

$$\alpha(K/E) + 1 \geqslant \alpha(K/F_1) + 1 .$$

Remarque. S'il n'y a qu'un seul saut dans la ramification de V (i.e. si $V = V_{\beta(K/F_1)}$ alors on a $\alpha(K/E) = \alpha(K/F_1)$ comme le lecteur le vérifiera aisément. C'est le cas en particulier si $d = 1$ et plus généralement si V est un module irréductible sur Gal (F_1/F).

6.11 On a ainsi obtenu l'inégalité

$$a(\chi) \geqslant \beta(E/L_s) + \alpha(K/F_1) + 1,$$

où L_s est le corps fixé par s dans E. Mais s est un élément de $H^{\alpha(K/F_1)} = H^{\alpha(K/F_1)} = H_{\beta(E/F_1)}$. Par conséquent, on a $\beta(E/L_s) = \beta(E/F_1)$.

D'après le théorème donnant le conducteur d'une représentation induite [Se, p. 109, Cor.], on a

$$a(\rho) = d(E/F_1) + a(\chi)$$

donc

$$a(\rho) \geqslant d(E/F_1) + \beta(E/F_1) + 1 + \alpha(K/F_1)$$

$$a(\rho) \geqslant p^d\big(\alpha(K/F_1) + 1\big) + \alpha(K/F_1). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Pour $d = 1$, la remarque de 6.10 et la proposition 3 de [Bu, p. 31] donnent l'égalité

$$a(r) = p^d\big(\alpha(K/F_1) + 1\big) + \alpha(K/F_1).$$

6.12 Supposons que le groupe V soit un module irréductible pour l'action de Gal (F_1/F). A-t-on alors l'égalité dans le théorème 1.8 ? Cette question reste ouverte.

BIBLIOGRAPHIE

[Bo] Borel, A. Formes automorphes et séries de Dirichlet. *Séminaire Bourbaki*, 1974/75, n° 466, pp. 1-34.

[Bu] Buhler, J. *Icosaedral Galois Representations*. Lecture Notes in Math. n° 654, Springer, Berlin 1978.

[Ca] Cartier, P. La conjecture de Langlands dans le cas 2-adique. *Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes*, Université de Paris VII, 1977.

[Co] *Automorphic forms, representations and L-functions*. A.M.S. Summer Institute, Corvallis, juillet 1977 (à paraître).

[De] Deligne, P. Les constantes des équations fonctionnelles. *Modular functions of one variable II*. Lectures Notes in Math. n° 349, Springer, Berlin, 1973.

[Ge] Gérardin, P. Facteurs locaux des algèbres simples de rang 4. *Séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes*, Université de Paris VII, 1977 (paru dans le n° 1 des publications mathématiques de l'Université de Paris VII).

[He] Henniart, G. *Représentations du groupe de Weil d'un corps local*. Thèse de 3e cycle, à paraître aux publications mathématiques de l'Université de Paris-Sud.