

§ 3. Le résultat

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

des réels, on conjecture que tout nombre algébrique de degré 3 au moins est à quotients partiels non bornés.)

Dans ce qui suit, nous aurons à considérer des corps à $q = p^\mu$ éléments (p premier, $\mu \geq 1$ entier). On dira comme précédemment que $S \in \mathbb{F}_q^{\mathbb{N}}$ est algébrique si $S \in \mathbb{F}_q((X))$ est algébrique sur $\mathbb{F}_q(X)$.

§ 3. LE RÉSULTAT

Soient Ξ et Ξ' deux alphabets finis et soient $T = (t_n) \in \Xi^{\mathbb{N}}$, $T' = (t'_n) \in \Xi'^{\mathbb{N}}$. On dit que T' est une image de T si il existe une application $\alpha: \Xi \rightarrow \Xi'$ telle que pour tout n , $\alpha(t_n) = t'_n$.

THÉORÈME 1. *Soit Ξ un alphabet fini non vide. Soit $T \in \Xi^{\mathbb{N}}$ et soit p un nombre premier. Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe $q = p^\mu$ tel que T soit l'image d'un élément algébrique de $\mathbb{F}_q((X))$;*
- (ii) *T est l'image d'une suite engendrée par un p -automate;*
- (iii) *T est l'image d'un point fixe d'une p -substitution.*

L'équivalence entre (ii) et (iii) était connue de Cobham [3]. Dans un autre article, Cobham [2] établit que si une suite est engendrée à la fois par un g_1 -automate et par un g_2 -automate, alors elle est périodique à partir d'un certain rang pourvu que g_1 et g_2 soient multiplicativement indépendants. Ce résultat se traduit donc par le corollaire suivant.

COROLLAIRE. *Soient $q_1 = p_1^{\nu_1}$ et $q_2 = p_2^{\nu_2}$ où $p_1 \neq p_2$ (premiers). Soit (ε_n) une suite infinie d'entiers $0 \leq \varepsilon_n < \min\{q_1, q_2\}$. Si*

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbb{F}_{q_1}((X))$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_{q_1}(X)$ et si

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n X^n \in \mathbb{F}_{q_2}((X))$$

est algébrique sur $\mathbb{F}_{q_2}(X)$, alors S_1 et S_2 sont tous deux rationnels.

Ainsi, si un élément est algébrique irrationnel dans une base, il est transcendant dans toute base indépendante (comparer avec le problème 1 du paragraphe 1). Il serait intéressant d'élargir le champ d'application du résultat précédent de façon à pouvoir l'appliquer au corps \mathbf{R} . Dans cet ordre d'idée, il faut signaler le résultat suivant obtenu indépendamment par Dekking [5], K. Kubota [9] et A. van der Poorten [17] employant une méthode de K. Mahler.

THÉORÈME 2. *Le nombre de Morse*

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{2^n}$$

est transcendant.

La méthode employée pour établir ce résultat devrait pouvoir permettre de montrer que si la suite $S = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots)$ est engendrée par un g -automate, alors $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n g^{-n}$ est transcendant. Ceci répondrait à la conjecture énoncée au premier paragraphe.

§ 4. APPENDICE: SUITE DE MORSE PONDÉRÉE ET NOMBRES DE PISOT

Soit $c = (c_n)$ une suite infinie de nombres réels. A l'entier $n \geq 0$, on associe le nombre

$$f_c(n) = \exp 2i\pi \sum_{k=0}^{\infty} e_k(n) c_k,$$

où $e_k(n)$ est la k^e décimale binaire de n . On peut alors montrer que la suite f_c admet une corrélation:

$$\forall l \in \mathbf{Z}, \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \overline{f_c(n)} f_c(n+l) = \gamma_c(l) \text{ existe.}$$

Cette corrélation γ_c est transformée de Fourier d'une mesure positive bornée Λ_c

$$\gamma_c(l) = \int_0^1 (\exp 2i\pi l x) \Lambda_c(dx).$$

Soit $\theta \geq 1$ un nombre réel. Considérons la suite $c = (\theta^n)$ à laquelle correspondra la mesure Λ_c notée Λ_θ .