

# 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

### 3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3

Dans toute la suite  $G$  est un ouvert *connexe* borné de  $\mathbf{C}$ ,  $G^*$  son enveloppe de Carathéodory,  $U$  la composante connexe de  $G^*$  contenant  $G$ ,  $\psi$  une transformation conforme de  $U$  sur  $\Delta$ . On notera  $\varphi$  la transformation réciproque de  $\Delta$  sur  $U$  :  $\varphi = \psi^{-1}$ .

3.1. *Lemme.* Soient  $\zeta \in \partial U$  un point accessible,  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  deux chemins dans  $U$  se terminant en  $\zeta$ . Alors

$$\lim_{\gamma_1 \ni z \rightarrow \zeta} \psi(z) = \lim_{\gamma_2 \ni z \rightarrow \zeta} \psi(z)$$

*Preuve.* On sait que  $\lim_{\gamma_i \ni z \rightarrow \zeta} \psi(z)$  existe ( $i=1, 2$ ) (cf. [6], p. 315-323).

On peut supposer que  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont des *arcs* de Jordan qui ne se rencontrent pas (sauf au point  $\zeta$ ); soit  $l$  un arc de Jordan dans  $U$  joignant les points initiaux de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ , et ne rencontrant pas  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ; la juxtaposition des arcs  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  et  $l$  détermine (avec le point  $\zeta$ ) une courbe fermée de Jordan; soit  $\Omega$  l'intérieur de cette courbe, alors  $\Omega \subset U$ : en effet si  $\Omega$  n'était pas inclus dans  $U$ , il existerait des points de  $\partial U$  dans  $\Omega$ , et donc des points de  $H$  (composante connexe non bornée du complémentaire de  $\bar{G}$ ) dans  $\Omega$  d'après 2.4, et puisque  $\partial\Omega \cap H = \emptyset$  on devrait avoir  $H \subset \Omega$  ce qui est absurde. Le théorème suivant de Lindelof permet de conclure.

**THÉORÈME.** Soit  $\Omega$  un ouvert simplement connexe dans la frontière  $\Gamma$  est une courbe de Jordan. Soit  $\psi$  une fonction analytique dans  $\Omega$  et satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $|\psi(z)| \leq 1$  dans  $\Omega$ .
- (ii)  $\psi$  est continue sur  $\Gamma \setminus \{\zeta\}$  où  $\zeta$  est un point de  $\Gamma$ .
- (iii) Si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  désignent les arcs frontières déterminés par  $\zeta$  et un second point  $\zeta'$  de  $\Gamma$ , les limites  $a = \lim_{\Gamma_1 \ni z \rightarrow \zeta} \psi(z)$ ,  $b = \lim_{\Gamma_2 \ni z \rightarrow \zeta} \psi(z)$  existent.

Alors  $a = b$  et  $\lim_{\Omega \ni z \rightarrow \zeta} \psi(z) = a$ .

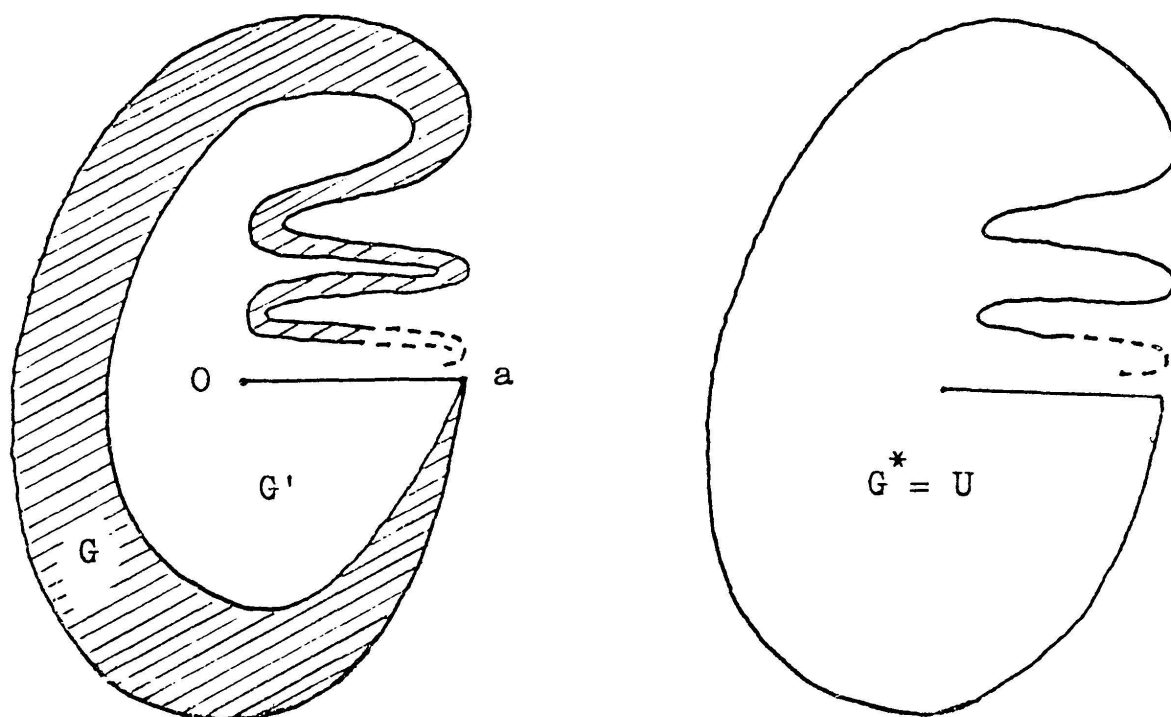
Une démonstration de ce théorème se trouve dans [6], p. 202.

Soient  $T$  l'ensemble des points de  $\partial\Delta$  où  $\varphi$  a des limites radiales et  $\varphi^*$  la fonction « frontière » ainsi définie sur  $T$ ;  $\partial\Delta \setminus T$  est de mesure nulle et  $\varphi^*$  est *injective* sur  $T$  d'après le lemme 3.1.

3.2. *Démonstration du théorème 1.3.* Supposons que  $P(G)$  ne soit pas fermé dans  $H^\infty(G)$ ; alors d'après 2.2  $\psi(G) = O$  n'est pas dominant dans  $\Delta$ ; d'après 2.3 il existe donc  $y \in \partial\Delta$  et  $r > 0$  tels que  $\Delta(y, r) \cap O = \emptyset$  et il est clair que  $\varphi^*(T \cap \Delta(y, r))$  est un sous-ensemble non dénombrable de  $\partial U$  formé de points accessibles à partir de  $G'$ .

Réciproquement soit  $A$  l'ensemble des points de  $\partial U$  accessibles à partir de  $G'$  et supposons que  $A$  soit un ensemble infini non dénombrable. Soient  $(G'_n)$  les composantes connexes de  $G'$  et notons  $A_n$  l'ensemble des points de  $\partial U$  accessibles à partir de  $G'_n$ . Il est clair que  $A = \bigcup_n A_n$  et il existe donc un entier  $n_0$  pour lequel  $A_{n_0}$  est infini; soient  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$  deux points distincts de  $A_{n_0}$  et  $\gamma$  un arc de Jordan dans  $G'_{n_0}$  tel que  $\gamma(0) = \zeta_1$  et  $\gamma(1) = \zeta_2$ ; l'image par  $\psi$  de  $\gamma$  est un arc de Jordan dans  $\Delta$  joignant deux points *distincts* de  $\partial\Delta$  (cf. [6], p. 322); puisque  $O = \psi(G)$  est connexe,  $\partial\Delta$  n'est pas inclus dans  $\partial O$  et donc  $O$  n'est pas dominant dans  $\Delta$ , ainsi que  $G$  dans  $U : P(G)$  n'est donc pas fermé dans  $H^\infty(G)$  d'après 2.2.

*Exemple.* ([7], th. 4.1).



$G$  est l'ouvert hachuré: les points du segment  $[0, a]$  sont accessibles à partir de  $G'$ ;  $P(G)$  n'est donc pas fermé dans  $H^\infty(G)$ .