3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

3. Démonstration du théorème 1.3

Dans toute la suite G est un ouvert *connexe* borné de $\mathbf{C}$, G^* son enveloppe de Carathéodory, U la composante connexe de G^* contenant G, ψ une transformation conforme de U sur Δ. On notera φ la transformation réciproque de Δ sur $U : \varphi = \psi^{-1}$.

3.1. *Lemme.* Soient $\zeta \in \partial U$ un point accessible, γ_1 et γ_2 deux chemins dans U se terminant en ζ. Alors

$$\lim_{\gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z) = \lim_{\gamma_2 \ni z \to \zeta} \psi(z)$$

Preuve. On sait que $\lim\limits_{\gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z)$ existe ($i=1, 2$) (cf. [6], p. 315-323). On peut supposer que γ_1 et γ_2 sont des *arcs* de Jordan qui ne se rencontrent pas (sauf au point ζ); soit l un arc de Jordan dans U joignant les points initiaux de γ_1 et γ_2, et ne rencontrant pas γ_1 et γ_2; la juxtaposition des arcs γ_1, γ_2 et l détermine (avec le point ζ) une courbe fermée de Jordan; soit Ω l'intérieur de cette courbe, alors $\Omega \subset U$: en effet si Ω n'était pas inclus dans U, il existerait des points de ∂U dans Ω, et donc des points de H (composante connexe non bornée du complémentaire de $\bar{G}$) dans Ω d'après 2.4, et puisque $\partial\Omega \cap H = \varnothing$ on devrait avoir $H \subset \Omega$ ce qui est absurde. Le théorème suivant de Lindelof permet de conclure.

Théorème. *Soit Ω un ouvert simplement connexe dans la frontière Γ est une courbe de Jordan. Soit ψ une fonction analytique dans Ω et satisfaisant les conditions suivantes :*

(i) $|\psi(z)| \leqslant 1$ *dans* Ω.

(ii) ψ *est continue sur* $\Gamma \setminus \{\zeta\}$ *où* ζ *est un point de* Γ.

(iii) *Si* Γ_1 *et* Γ_2 *désignent les arcs frontières déterminés par* ζ *et un second point* ζ' *de* Γ, *les limites* $a = \lim\limits_{\Gamma_1 \ni z \to \zeta} \psi(z)$, $b = \lim\limits_{\Gamma_2 \ni z \to \zeta} \psi(z)$ *existent.*

Alors $a = b$ *et* $\lim\limits_{\Omega \ni z \to \zeta} \psi(z) = a$.

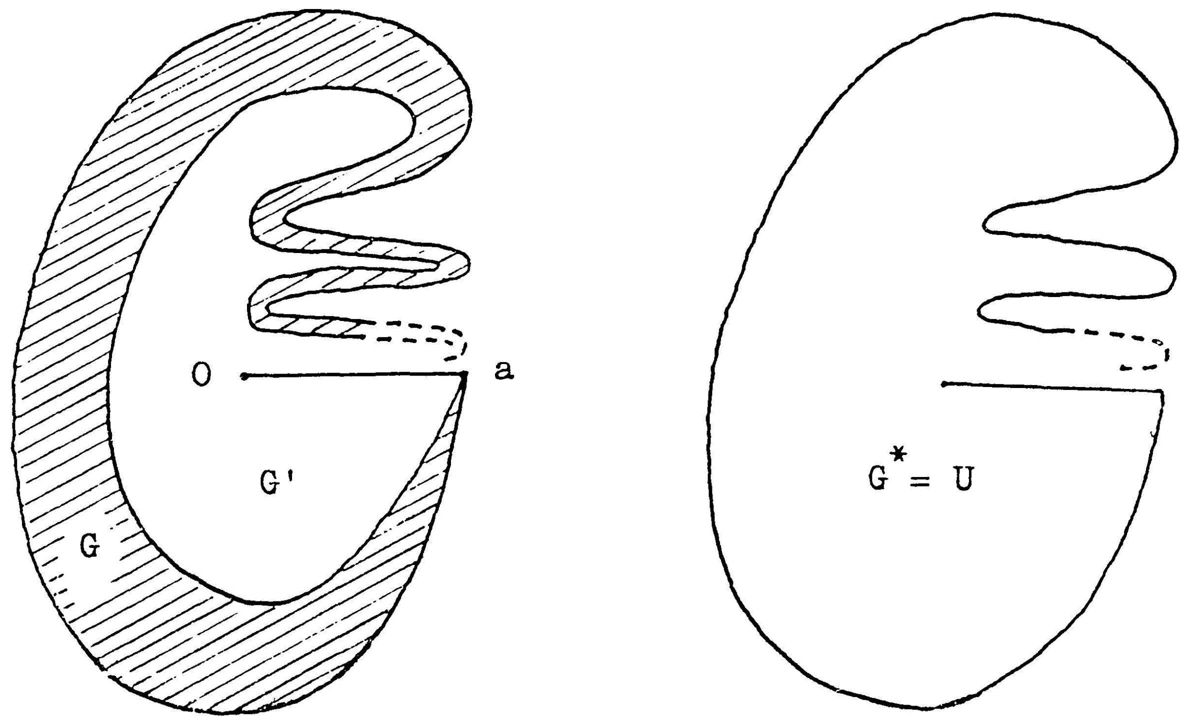
Une démonstration de ce théorème se trouve dans [6], p. 202.

Soient T l'ensemble des points de $\partial\Delta$ où φ a des limites radiales et φ^* la fonction « frontière » ainsi définie sur T; $\partial\Delta \setminus T$ est de mesure nulle et φ^* est *injective* sur T d'après le lemme 3.1.

3.2. *Démonstration du théorème* 1.3. Supposons que $P(G)$ ne soit pas fermé dans $H^\infty(G)$; alors d'après 2.2 $\psi(G) = O$ n'est pas dominant dans Δ; d'après 2.3 il existe donc $y \in \partial\Delta$ et $r > 0$ tels que $\Delta(y, r) \cap O = \varnothing$ et il est clair que $\varphi^*\left(T \cap \Delta(y, r)\right)$ est un sous-ensemble non dénombrable de ∂U formé de points accessibles à partir de G'.

Réciproquement soit A l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G' et supposons que A soit un ensemble infini non dénombrable. Soient (G_n') les composantes connexes de G' et notons A_n l'ensemble des points de ∂U accessibles à partir de G_n'. Il est clair que $A = \bigcup_n A_n$ et il existe donc un entier n_0 pour lequel A_{n_0} est infini; soient ζ_1 et ζ_2 deux points distincts de A_{n_0} et γ un arc de Jordan dans G_{n_0}' tel que $\gamma(0) = \zeta_1$ et $\gamma(1) = \zeta_2$; l'image par ψ de γ est un arc de Jordan dans Δ joignant deux points *distincts* de $\partial\Delta$ (cf. [6], p. 322); puisque $O = \psi(G)$ est connexe, $\partial\Delta$ n'est pas inclus dans ∂O et donc O n'est pas dominant dans Δ, ainsi que G dans U : $P(G)$ n'est donc pas fermé dans $H^\infty(G)$ d'après 2.2.

Exemple. ([7], th. 4.1).



G est l'ouvert hachuré: les points du segment $[0, a]$ sont accessibles à partir de G'; $P(G)$ n'est donc pas fermé dans $H^\infty(G)$.