

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 26 (1980)
Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE THÉORÈME D'APPROXIMATION DE RUNGE
Autor: Auderset, Claude
Kapitel: Utilisation de la dualité de Serre
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-51070>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

de compact non vide ouvert dans $A \setminus \bar{P}$. D'après le lemme, ceci équivaut à la condition 3).

Pour vérifier l'équivalence de 3) et 4), considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A \setminus \bar{P}$ de $X \setminus \bar{P}$

$$H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^1(U, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190].

Ici, \mathbf{Z} désigne le faisceau constant et, pour un espace topologique Y , $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est formé des fonctions localement constantes sur Y à support compact. Le support d'un élément de $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est un compact ouvert dans Y . D'après le lemme, lorsque Y est localement compact, $H_c^0(Y, \mathbf{Z}) = 0$ si et seulement si Y n'a pas de composante connexe compacte. Ceci montre d'abord que $H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) = 0$. Ensuite, que la condition 3) équivaut à la nullité de $H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$ ou encore, d'après l'exactitude de la suite précédente, à l'injectivité de $H_c^1(U, \mathbf{Z}) \rightarrow H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$. Par dualité de Poincaré,

$$H_c^1(U, \mathbf{Z}) \cong H_1(U) \text{ et } H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \cong H_1(X \setminus \bar{P}),$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence entre 3) et 4).

UTILISATION DE LA DUALITÉ DE SERRE

Désignons par \mathcal{D} l'ensemble des diviseurs effectifs sur X à support contenu dans P . Pour $D \in \mathcal{D}$, soient $\xi(D)$ le produit tensoriel de ξ avec le fibré en droites associé à D et $\tilde{\xi}(D) = \text{Hom}(\xi(D), \kappa)$, où κ est le fibré cotangent de X . Les sections holomorphes de $\xi(D)$ sont interprétés comme sections méromorphes f de ξ telles que $\text{div } f \geq -D$ et les sections holomorphes de $\tilde{\xi}(D)$ comme sections holomorphes ω de $\tilde{\xi} = \text{Hom}(\xi, \kappa)$ telles que $\text{div } \omega \geq D$.

Considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé A de X

$$\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow H_c^1(U, \tilde{\xi}) \rightarrow H_c^1(X, \tilde{\xi}(D))$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190], où Γ_c désigne les sections à support compact du faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites.

Lorsque la surface X est ouverte (resp. compacte), $\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) = 0$ pour tout D (resp. pour D assez grand). D'autre part, par dualité de Serre [5, Théorème 3, p. 21 et Théorème 4, p. 22],

$$H_c^1(U, \tilde{\xi}) \cong \Gamma(U, \xi)' \text{ et } H_c^1(X, \tilde{\xi}(D)) \cong \Gamma(X, \xi(D))',$$

où $\Gamma(\cdot)'$ désigne le dual pour la topologie de la convergence compacte de l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites. On arrive donc à la suite exacte

$$0 \rightarrow \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow \Gamma(U, \xi)' \rightarrow \Gamma(X, \xi(D))'$$

pour D assez grand.

Si $M(D)$ dénote l'image de $\Gamma(X, \xi(D))$ par restriction dans $\Gamma(U, \xi(D))$ et $M(D)^\perp$ l'espace des formes linéaires continues sur $\Gamma(U, \xi(D))$ s'annulant sur $M(D)$, on peut encore écrire $\Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \cong M(D)^\perp$ pour D assez grand.

Les propriétés fonctorielles de l'homomorphisme de jonction $\Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \rightarrow H_c^1(U, \tilde{\xi})$ et de l'isomorphisme de Serre $H_c^1(X, \tilde{\xi}(D)) \cong \Gamma(X, \xi(D))'$ montrent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D_1)) & \xrightarrow{\sim} & M(D_1)^\perp \\ \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D_2)) & \xrightarrow{\sim} & M(D_2)^\perp \end{array}$$

commute pour $D_1 \leq D_2$. Prenant l'intersection (ou, si l'on veut, la limite projective) des deux membres de l'isomorphie $\Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \cong M(D)^\perp$, on arrive à

$$\bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \cong \bigcap_{D \in \mathcal{D}} M(D)^\perp = M^\perp,$$

où $M = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} M(D)$ est formé des restrictions à U des sections méromorphes de ξ au-dessus de X à pôles dans P .

La condition 1) du théorème est que M soit dense dans $\Gamma(U, \xi)$ ou encore, d'après Hahn-Banach, que l'orthogonal M^\perp soit nul:

La condition 1) est équivalente à

$$1') \quad \bigcap_{D \in \mathcal{D}} \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) = 0.$$