Utilisation de la dualité de Serre

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **26 (1980)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

de compact non vide ouvert dans $A \setminus \bar{P}$. D'après le lemme, ceci équivaut à la condition 3).

Pour vérifier l'équivalence de 3) et 4), considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé $A \setminus \bar{P}$ de $X \setminus \bar{P}$

$$H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \to H_c^1(U, \mathbf{Z}) \to H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190].

Ici, $\mathbf{Z}$ désigne le faisceau constant et, pour un espace topologique Y, $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est formé des fonctions localement constantes sur Y à support compact. Le support d'un élément de $H_c^0(Y, \mathbf{Z})$ est un compact ouvert dans Y. D'après le lemme, lorsque Y est localement compact, $H_c^0(Y, \mathbf{Z}) = 0$ si et seulement si Y n'a pas de composante connexe compacte. Ceci montre d'abord que $H_c^0(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) = 0$. Ensuite, que la condition 3) équivaut à la nullité de $H_c^0(A \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$ ou encore, d'après l'exactitude de la suite précédente, à l'injectivité de $H_c^1(U, \mathbf{Z}) \to H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z})$. Par dualité de Poincaré,

$$H_c^1(U, \mathbf{Z}) \cong H_1(U) \text{ et } H_c^1(X \setminus \bar{P}, \mathbf{Z}) \cong H_1(X \setminus \bar{P}),$$

ce qui achève la preuve de l'équivalence entre 3) et 4).

Utilisation de la dualité de Serre

Désignons par $\mathscr{D}$ l'ensemble des diviseurs effectifs sur X à support contenu dans P. Pour $D \in \mathscr{D}$, soient $\xi(D)$ le produit tensoriel de ξ avec le fibré en droites associé à D et $\tilde{\xi}(D) = \operatorname{Hom}(\xi(D), \kappa)$, où κ est le fibré cotangent de X. Les sections holomorphes de $\xi(D)$ sont interprétés comme sections méromorphes f de ξ telles que $\operatorname{div} f \geqslant -D$ et les sections holomorphes de $\tilde{\xi}(D)$ comme sections holomorphes ω de $\tilde{\xi} = \operatorname{Hom}(\xi, \kappa)$ telles que $\operatorname{div} \omega \geqslant D$.

Considérons la suite exacte de cohomologie à supports compacts associée au sous-espace fermé A de X

$$\Gamma_c(X, \tilde{\xi}(D)) \to \Gamma_c(A, \tilde{\xi}(D)) \to H_c^1(U, \tilde{\xi}) \to H_c^1(X, \tilde{\xi}(D))$$

[3, Théorème 4.10.1, p. 190], où Γ_c désigne les sections à support compact du faisceau des sections holomorphes d'un fibré en droites.

Lorsque la surface X est ouverte (resp. compacte), $\Gamma_c\big(X, \tilde{\xi}(D)\big) = 0$ pour tout D (resp. pour D assez grand). D'autre part, par dualité de Serre [5, Théorème 3, p. 21 et Théorème 4, p. 22],

$$H_c^1(U, \tilde{\xi}) \cong \Gamma(U, \xi)' \text{ et } H_c^1(X, \tilde{\xi}(D)) \cong \Gamma\big(X, \xi(D)\big)',$$

où $\Gamma(\ ,\ )'$ désigne le dual pour la topologie de la convergence compacte de l'espace des sections holomorphes d'un fibré en droites. On arrive donc à la suite exacte

$$0 \to \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \to \Gamma(U, \xi)' \to \Gamma\big(X, \xi(D)\big)'$$

pour D assez grand.

Si $M(D)$ dénote l'image de $\Gamma\big(X, \xi(D)\big)$ par restriction dans $\Gamma\big(U, \xi(D)\big)$ et $M(D)^\perp$ l'espace des formes linéaires continues sur $\Gamma\big(U, \xi(D)\big)$ s'annulant sur $M(D)$, on peut encore écrire $\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \cong M(D)^\perp$ pour D assez grand.

Les propriétés fonctorielles de l'homomorphisme de jonction $\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \to H_c^1(U, \tilde{\xi})$ et de l'isomorphisme de Serre $H_c^1\big(X, \tilde{\xi}(D)\big) \cong \Gamma\big(X, \xi(D)\big)'$ montrent que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D_1)\big) \arrow[r, "\sim"] & M(D_1)^\perp \\
\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D_2)\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[u, hook] & M(D_2)^\perp \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

commute pour $D_1 \leqslant D_2$. Prenant l'intersection (ou, si l'on veut, la limite projective) des deux membres de l'isomorphie $\Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \cong M(D)^\perp$, on arrive à

$$\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) \cong \bigcap_{D \in \mathscr{D}} M(D)^\perp = M^\perp,$$

où $M = \bigcup_{D \in \mathscr{D}} M(D)$ est formé des restrictions à U des sections méromorphes de ξ au-dessus de X à pôles dans P.

La condition 1) du théorème est que M soit dense dans $\Gamma(U, \xi)$ ou encore, d'après Hahn-Banach, que l'orthogonal $M^\perp$ soit nul:

La condition 1) *est équivalente à*

1′) $$\bigcap_{D \in \mathscr{D}} \Gamma_c\big(A, \tilde{\xi}(D)\big) = 0\,.$$