

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Herausgeber:** Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique  
**Band:** 27 (1981)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** SUR L'USAGE DE CRITÈRES POUR RECONNAÎTRE UN GROUPE LIBRE, UN PRODUIT AMALGAMÉ OU UNE HNN-EXTENSION  
**Autor:** Hausmann, Jean-Claude  
**Kapitel:** 5. Critère pour les HNN-extensions  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-51750>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.02.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

*Démonstration.* L'homomorphisme  $\Psi$  est injectif par (4.3). Pour démontrer la surjectivité de  $\Psi$ , on observe que l'arête  $a$  se projette sur l'unique arête  $\bar{a}$  de  $G \setminus \Gamma$ , ce qui entraîne que  $B = \{u, v\}$  est un ensemble de représentants pour l'action de  $G$  sur  $\text{Som } \Gamma$ . La proposition (2.4) assure alors que  $G$  est engendré par  $G_u \cup R_B$ , avec  $R_B = \{r \in G \mid \text{il existe } s_r \in \text{Ar } \Gamma \text{ telle que } o(s_r) \in B \text{ et } e(s_r) \in rB\}$ . Soit  $r \in R_B$ . Comme toutes les arêtes de  $\Gamma$  sont dans l'orbite de  $a$ , il existe  $h_r \in G$  tel que  $s_r = h_r a$ . De plus,  $o(s_r) = o(a) = u$ , d'où  $h_r \in G_u$ . Donc  $e(s_r) = rv = h_r v$ , d'où  $h_r^{-1} r \in G_v$ . On en déduit que  $G$  est engendré par  $G_u \cup G_v$ , d'où la surjectivité de  $\Psi$ . ■

## 5. CRITÈRE POUR LES *HNN*-EXTENSIONS

Soit  $F$  un sous-groupe d'un groupe  $H$ . Soit  $\phi: F \rightarrow H$  un homomorphisme injectif (un autre plongement de  $F$  dans  $H$ ). Désignons par  $\langle z \rangle$  le groupe cyclique infini de générateur  $z$ . Rappelons que l'on définit le groupe *HNN*  $(H, F, \phi)$  comme le quotient du produit libre  $H * \langle z \rangle$  par la clôture normale des éléments  $z^{-1} f z \phi(f)^{-1}$  pour  $f \in F$ . On dit que le groupe  $H^* = \text{HNN}(H, F, \phi)$  est obtenu de  $H, F$  et  $\phi$  par la *construction HNN*. Le groupe  $H$  s'appelle la *base* de  $H^*$ ,  $z$  s'appelle la *lettre stable* et  $F$  et  $\phi(F)$  sont les *sous-groupes associés* [L-S, Chap. IV, § 2]. Nous allons démontrer le critère suivant pour reconnaître une *HNN*-extension dans un groupe :

(5.1) THÉORÈME Soit  $G$  un groupe,  $F \subset H \subset G$  des sous-groupes de  $G$  et  $z \in G$  tel que  $z^{-1} F z \subset H$ . Désignons par  $\phi: F \rightarrow H$  l'homomorphisme  $\phi(f) = z^{-1} f z$ . On suppose que  $G$  agit sur un ensemble  $X$  et qu'il existe des sous-ensembles  $L_F$  et  $L_\phi$  de  $X$  ainsi qu'un élément  $d \in X - (L_F \cup L_\phi)$  satisfaisant aux conditions suivantes: (notation:  $\bar{L}_F = L_F \cup \{d\}$ ,  $\bar{L}_\phi = L_\phi \cup \{d\}$ )

- 1)  $F \subset G_d$
- 2)  $(H - F) \bar{L}_\phi \subset L_F$
- 3)  $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \subset L_\phi$
- 4)  $z^{-1} \bar{L}_F \subset L_F$  et  $z \bar{L}_\phi \subset L_\phi$
- 5)  $z(L_F - z^{-1} \bar{L}_F) \subset L_\phi$  et  $z^{-1}(L_\phi - z \bar{L}_\phi) \subset L_F$
- 6)  $(H - F) \bar{L}_\phi \cap z^{-1} \bar{L}_F = \emptyset$  et  $z(H - \phi(F)) z^{-1} \bar{L}_F \cap z \bar{L}_\phi = \emptyset$

Alors, l'homomorphisme  $\Psi: \text{HNN}(H, F, \phi) \rightarrow G$  induit par les inclusions (avec  $z$  comme lettre stable) est injectif.

*Démonstration.* Soit  $H^* = HNN(H, F, \phi)$ . En utilisant les relations  $fz = z\phi(F)$  et  $z^{-1}f = \phi(f)z^{-1}$  pour  $f \in F$ , on peut écrire un élément  $g \in H$  sous la forme  $g = g_1 f$  avec  $f \in F$  et

$$g_1 = h_k z^{\varepsilon(k)} h_{k-1} z^{\varepsilon(k-1)} \dots h_1 z^{\varepsilon(1)} h_0 \quad (*)$$

où  $h_i \in H$  et  $\varepsilon(i) = \pm 1$ , de manière que les conditions suivantes soient vérifiées :

- a)  $h_0 \in (H - F) \cup \{1\}$
- b) si  $\varepsilon(i) = -1$ , alors  $h_i \in (H - \phi(F)) \cup \{1\}$
- c) si  $\varepsilon(i) = 1$ , alors  $h_i \in (H - F) \cup \{1\}$
- d) il n'y a aucune suite  $z^\varepsilon 1 z^{-\varepsilon}$ .

Si  $\Psi(g) = 1$  et que  $g \neq 1$ , cela implique que  $g_1 \neq 1$  puisque  $\Psi|_F$  est l'inclusion  $F \subset G$ . Or, si  $g_1 \neq 1$ , nous allons montrer que  $\Psi(g)d \neq d$ . Il suffit pour cela de montrer que  $\Psi(g_1)d \neq d$ , puisque  $\Psi(f)d = d$  par l'hypothèse 1).

Décomposons l'écriture (\*) de  $g_1$  en un produit  $w_r w_{r-1} \dots w_0$  de sous-mots tels que :

$$w_0 = h_{k(0)} z h_{k(0)-1} z \dots z h_0$$

sous-mot maximal ne contenant pas de symbole «  $z^{-1}$  »

$$w_1 = h_{k(1)} z^{-1} h_{k(1)-1} z^{-1} \dots z^{-1} h_{k(0)+1} z^{-1}$$

sous-mot maximal ne contenant pas de symbole  $z^1$ .

$$w_2 = h_{k(2)} z h_{k(2)-1} z \dots z h_{k(1)+1} z$$

sous-mot maximal sans symbole  $z^{-1}$

etc., avec  $k(r) = k$ . Observons que par maximalité de  $w_i$ , le mot  $w_{2j}$  commence à droite par  $z$  (sauf  $w_0$ ) et le mot  $w_{2j+1}$  commence à droite par  $z^{-1}$ . Il est possible que  $k = 0$ ; il est aussi possible que  $w_0 = 1$ , mais alors  $w_1 \neq 1$  puisque  $g_1 \neq 1$ .

Pour alléger la présentation, nous écrirons  $g_1 d, w_i d$ , etc., à la place de  $\Psi(g_1)d, \Psi(w_i)d$ , etc. Le fait que  $g_1 d \neq d$  va résulter des assertions (A) à (F) suivantes :

- (A)  $w_0 \bar{L}_\phi \subset L_F \cup L_\phi$  si  $w_0 \neq 1$
- (B)  $w_0 \bar{L}_\phi \subset L_F$  si  $w_0 \neq 1$  et  $r \neq 0$
- (C)  $w_{2j-1} \bar{L}_F \subset L_F \cup L_\phi$  si  $w_{2j-1} \neq 1$
- (D)  $z w_{2j-1} \bar{L}_F \subset L_\phi$  si  $w_{2j-1} \neq 1$  et  $f \neq 2j-1$
- (E)  $w_{2j} z^{-1} \bar{L}_\phi \subset L_F \cup L_\phi$  si  $w_{2j} \neq 1$  ( $j \geq 1$ )
- (F)  $w_{2j} z^{-1} \bar{L}_\phi \subset L_F$  si  $w_{2j} \neq 1$  et  $r \neq 2j$  ( $j \geq 1$ )

Pour tirer l'inéquation  $g_1 d \neq d$  des assertions (A) à (F), il suffit d'écrire  $g_1$  sous la forme

$$g_1 = \dots (w_4 z^{-1}) (z w_3) (w_2 z^{-1}) (z w_1) w_0$$

et l'on déduit que  $g_1 d \in L_F \cup L_\phi$ .

*Preuve de (A), (B), (E) et (F).* On a déjà observé que si  $j \geq 1$ , le mot  $w_{zj}$  commençait à droite par  $z$ . Le mot  $w_{2j} z^{-1}$  commence donc par

$$h_{k(2j-1)+1} \in (H-F) \cup \{1\},$$

ce qui fait que la démonstration de (E) et (F) est identique à celle de (A) et (B) que nous allons donner: si  $h_0 \neq 1$ , on a  $h_0 \bar{L}_\phi \subset L_F - z^{-1} \bar{L}_F$  par les hypothèses 2) et 6). Ensuite  $z h_0 \bar{L}_\phi \subset z (L_F - z^{-1} L_F) \subset L_\phi$  par 5). Si  $h_0 = 1$ , on a  $z \bar{L}_\phi \subset L_\phi$  par 4), donc de toute façon on a  $z h_0 \bar{L}_\phi \subset L_\phi$ . Si  $h_1 = 1$ , on aura  $z z h_0 \bar{L}_\phi \subset z L_\phi$ . On voit qu'en continuant, on aura à chaque pas à appliquer l'une des hypothèses

$$h_i \bar{L}_\phi \subset L_F - z^{-1} L_F, \quad z (L_F - z^{-1} L_F) \subset L_\phi \quad \text{et} \quad z \bar{L}_\phi \subset L_\phi.$$

Il s'en suit l'assertion (A). Si  $r \neq 0$ , cela signifie que  $w_1 \neq 1$  et donc  $h_{k(0)} \neq 1$ , puisqu'on a la suite  $z^{-1} h_{k(0)} z$ . Dans ce cas,  $w_0 \bar{L}_\phi \subset h_{k(0)} \bar{L}_\phi \subset L_F$ .

*Preuve de (C) et (D).* On utilise l'hypothèse 4)  $z^{-1} \bar{L}_F \subset L_F$  tant que l'on ne rencontre que des  $h_i$  égaux à 1. Dans la situation  $h_i z^{-1}$  avec  $h_i \neq 1$  (donc  $h_i \in H - \phi(F)$  par b)), on procède comme suit:  $h_i z^{-1} L_F = z^{-1} (z h_i z^{-1}) \bar{L}_F$ . Or  $z h_i z^{-1} \bar{L}_F \subset L_\phi - z \bar{L}_\phi$  par les hypothèses 3) et 6), d'où  $h_i z^{-1} \bar{L}_F \subset z^{-1} (L_\phi - z \bar{L}_\phi) \subset L_F$  par 5). De proche en proche on démontre ainsi (C). Si  $r \neq 2j - 1$ , cela signifie que  $w_{2j} \neq 1$  et donc  $h_{k(2j-1)} \neq 1$  puisqu'on a la suite  $z h_{k(2j-1)} z^{-1}$ . On a alors affaire à la situation

$$z w_{2j-1} \bar{L}_F \subset z z^{-1} (z h_{k(2j-1)} z^{-1}) \bar{L}_F \subset L_\phi - z L_\phi. \quad \blacksquare$$

(5.2) *Remarque.* Il résulte de la démonstration de (5.1) que les hypothèses de (5.1) peuvent être affaiblies de la manière suivante: on choisit un ensemble  $R_F$  (respectivement  $R_\phi$ ) de représentants de classes à gauche non-triviale de  $H$  modulo  $F$  (respectivement: modulo  $\phi(F)$ ). On peut alors remplacer dans les hypothèses 2), 3) et 6)  $(H-F)$  par  $R_F$  et  $(H-\phi(F))$  par  $R_\phi$ .

(5.3) *COROLLAIRE.* Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$ . Soit  $a \in \text{Ar } \Gamma$  avec  $o(a) = u$  et  $e(a) = v$ . Supposons qu'il existe  $z \in G$  tel que  $o(za) = v$ . Alors  $z^{-1} G_a z \subset G_u$ , ce qui définit un homomorphisme injectif

$\phi: G_a \rightarrow G_u$  (par  $\phi(x) = z^{-1}xz$ ) et l'homomorphisme  $\Psi: HNN(G_u, G_a, \phi) \rightarrow G$  qui étend les inclusions est injectif.

*Démonstration.* Le fait que  $z^{-1}G_az \subset G_u$  provient simplement de l'inclusion  $G_a \subset G_v = G_{zu} = zG_u z^{-1}$ .

Soit  $\dot{\Gamma}$  le premier subdivisé barycentrique de  $\Gamma$  (voir démonstration de (4.3) pour les notations). On va appliquer le critère (5.1) à la situation :

$$X = \text{Som } \dot{\Gamma}, \quad H = G_u, \quad F = G_a = G_{(u, a)} = G_{(a, v)}$$

$$L_F = \text{Som } \mathcal{R}(u, a) \quad L_\phi = \text{Som } \mathcal{B}(a, v) \quad d = a \subset \text{Som } \dot{\Gamma}$$

Le lecteur pourra donc visualiser la situation en utilisant la figure 7 de la démonstration de (4.3) en changeant  $L_1$  en  $L_F$  et  $L_2$  en  $L_\phi$ . Nous allons vérifier les points 1) à 6) de l'énoncé de (5.1).

Le point 1) est banal. Le point 2) provient du fait que  $H - F = G_u - G_a$  et le point 3) de ce que  $z(H - \phi(F))z^{-1} = G_v - G_a$ . Le point 4) se déduit de ce que

$$e(z^{-1}(a, v)) = u \quad \text{et} \quad o(z(u, a)) = v.$$

*Point 5).* L'ensemble  $z(\bar{L}_F - z^{-1}\bar{L}_F)$  constitue les sommets d'un sous-arbre relié à  $v$  par l'arête  $t = z(u, a)$ . Or  $t \neq (a, v)$  car  $o(t) = v$  et  $e(a, v) = v$ . Donc  $z(\bar{L}_F - z^{-1}\bar{L}_F) \subset L_\phi$ . Même raisonnement pour l'autre inclusion de 5).

*Point 6).* Soit  $h \in H - F$ . Le sous-arbre  $A$  dont l'ensemble de sommets est  $h\bar{L}_\phi$  est relié à  $u$  par l'arête  $h(u, a)$ , tandis que le sous-arbre  $B$  de  $\dot{\Gamma}$  dont l'ensemble de sommets est  $z^{-1}L_F$  est lui relié à  $u$  par l'arête  $z^{-1}(a, v)$ . Or, ces arêtes  $h(u, a)$  et  $z^{-1}(a, v)$  sont distinctes puisque

$$u = o(h(u, a)) = e(z^{-1}(a, v)).$$

Donc  $A \cap B = \emptyset$ . Même raisonnement pour la seconde partie du point 6). ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'énoncé suivant, dû à Bass-Serre [Se, p. 50 et aussi § 5].

(5.4) COROLLAIRE. Soit  $G$  un groupe agissant sur un arbre  $\Gamma$ , de manière que le graphe quotient  $G \backslash \Gamma$  soit un lacet (graphe comportant exactement un sommet et une arête). Soit  $a \in \text{Ar } \Gamma$ . Alors  $G$  est isomorphe à une HNN-extension de base  $G_{o(a)}$  et dont l'un des sous-groupes associés est  $G_a$ .

*Démonstration.* Posons  $u = o(a)$  et  $v = e(a)$ . Puisque  $\text{Som } G \backslash \Gamma = \{\bar{u}\}$ , il existe  $z \in G$  tel que  $zu = v$ . On en déduit, d'après le Corollaire (5.3) que  $z^{-1}G_az \subset G_u$  et que l'homomorphisme  $\Psi: HNN(G_u, G_a, \phi) \rightarrow G$  qui induit les

inclusions est injectif (avec  $\phi(x) = z^{-1}xz$ ). D'autre part, d'après (2.4),  $G$  est engendré par

$$G_u \cup R_{\{u,v\}}, \text{ où } R_{\{u,v\}} = \{r \in G \mid \text{il existe } a_r \in \text{Ar } \Gamma \\ \text{avec } o(a_r) \in \{u, v\} \text{ et } e(a_r) \in r\{u, v\}\}.$$

Soit  $r \in R_{\{u,v\}}$ . Comme toutes les arêtes de  $\Gamma$  sont dans la même orbite, il existe  $d_r \in G$  tel que  $a_r = d_r a$ . On a donc

$$d_r v = d_r z u \in \{ru, rv\}.$$

Si  $o(a_r) = u$ , on a

$$d_r \in G_u \text{ et } e(a_r) = r_v = d_r v,$$

d'où

$$d_r^{-1} r \in G_v = zG_u z^{-1}.$$

Si  $o(a_r) = v$ , on a

$$z^{-1}d_r \in G_u \text{ et } e(z^{-1}a_r) = z^{-1}d_r v = z^{-1}rv,$$

d'où encore  $d_r^{-1} r \in G_v = zG_u z^{-1}$ . Dans tous les cas on déduit donc que  $r$  est dans le sous-groupe engendré par  $G_u$  et  $z$ , d'où la surjectivité de  $\Psi$ . ■

## 6. STRUCTURES BIPOLAIRES

Rappelons qu'une *structure bipolaire* sur un groupe  $G$  est une partition de  $G$  en cinq sous-ensembles  $F, EE, E^*E, E^*E^*$  et  $EE^*$  satisfaisant aux axiomes 1) à 6) ci-dessous, avec les conventions suivantes : Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles de  $G$ , on définit l'ensemble

$$AB = \{g = ab \in G \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$$

et l'ensemble

$$A^{-1} = \{g \in G \mid g^{-1} \in A\}.$$

Si  $X \in \{E, E^*\}$ , alors  $(X^*)^* = X$ .