Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 27 (1981)

Heft: 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N

Autor: Erdös, Paul / Nicolas, Jean-Louis

Kapitel: §1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-51737

Interprétation géométrique: Le graphe de f, contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en n. Nous démontrerons:

THÉORÈME 4. *La fonction* $n \to n - \omega(n)$ *a une infinité de points d'étranglement.*

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points n tels qu'il existe juste avant n, une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

§ 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Minoration: D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre $(1-2\varepsilon)\log X$ et $(1-\varepsilon)\log X$ un nombre x tel que:

$$\pi\big(x+f(x)\big) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \qquad \text{et} \qquad \pi(x) - \pi\big(x-f(x)\big) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $\dfrac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

On choisit $f(x) = c\sqrt{x}\log x$. Soit k tel que $p_k \leqslant x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r}\, q_1 \dots q_r\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant s$$

où $q_1, \dots, q_r$ sont des nombres premiers distincts choisis parmi $p_{k+1}, \dots, p_{k+s}$.

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$ et il y en a 2^s. De plus ils vérifient:

$$n \leqslant A_k \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s}}\right)^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leqslant x + f(x)$ et $p_{k-s} \geqslant x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \dfrac{f(x)}{\log x}$. On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leqslant s \log \frac{x+f(x)}{x-f(x)} \lesssim 2c^2 \log x\,.$$

Si l'on choisit $c < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on aura donc $A_k \leqslant n < A_{k+1}$ et ces nombres n seront ω-largement composés et $\leqslant X$. On aura donc :

$$Q_l(X) \geqslant 2^s \geqslant \exp\left(\frac{(1-\varepsilon)\log 2}{\sqrt{2}} \sqrt{\log X}\right).$$

Majoration : La majoration de $Q_l\,(X)$ est basée sur le lemme:

LEMME 1. *Soit* $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_k$ *le* $k^{\text{ième}}$ *nombre premier et soit* $T(x)$ *le nombre de solutions de l'inéquation :*

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots \leqslant x\,, \qquad x_i \in \{0, 1\}.$$

Si $C > \pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, *on a pour* x *assez grand :*

$$\log T(x) \leqslant C\sqrt{\frac{x}{\log x}}\,.$$

Démonstration. Le nombre de solutions de l'équation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots = n\,, \qquad x_i \in \{0, 1\}$$

est le nombre $S\,(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leqq x} S\,(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Hardy et Ramanujan (cf. [Ram]) et Roth et Szekeres donnent la formule [Roth]:

$$\log S\,(n) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right)$$

et montrent que $S\,(n)$ est une fonction croissante de n. On a alors: $T(x) \leqslant x\,S\,[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble:

$$E_k = \{\, n \mid \omega(n) = k,\ n < A_{k+1} \}\,.$$

Soit $n \in E_k$, $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \ldots q_k$ est sans facteur carré et $n' \in E_k$. De plus $\dfrac{n}{n'} < p_{k+1}$. On a donc:

$$\operatorname{card} E_k \leqslant p_{k+1} \operatorname{card} E'_k\,,$$

avec: $E'_k = \{n \mid n$ sans facteur carré, $\omega(n) = k, n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit:

$$n = 2^{1-y_k}\, 3^{1-y_{k-1}} \dots p_k^{1-y_1}\, p_{k+1}^{x_1} \dots p_{k+r}^{x_r} \dots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1 et $\sum x_i = \sum y_i$. Il vient:

$$\log \frac{n}{A_k} = x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'inéquation, en x_i et y_i valant 0 ou 1:

$$x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

On en déduit: card $E'_k \leqslant N_1 N_2$, avec N_i = nombre de solutions de l'inéquation ξ_i $(i=1,2)$:

$$(\xi_1) \quad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leqslant \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \quad y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation ξ_1 en deux:

$$\xi'_1: \quad \sum_{r=1}^{R} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leqslant \log p_{k+1}\,,$$

$$\xi''_1: \quad \sum_{r=R+1}^{\infty} x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

Le nombre de variables de ξ''_1 est en fait fini, et majoré par $p_k\, p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de ξ''_1 est majoré par $\dfrac{1}{\log 2} \log p_{k+1}$. Le nombre N''_1 de solutions de ξ''_1 est majoré par:

$$N_1'' \leqslant \sum_{j \leqslant \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}} \binom{p_k\, p_{k+1}}{j} \leqslant \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} (p_k\, p_{k+1})^{\frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}}$$

ce qui assure:

$$N_1'' = \exp\left((O \log p_k)^2\right).$$

Il résulte de l'inégalité de Brun-Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]):

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y / \log y$$

valable pour $1 < y \leqslant x$ que, pour $k \geqslant 2$:

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log (p_{k+r} - p_k) \geqslant \frac{r}{2} \log 2r.$$

On en déduit que pour $r \leqslant R$, on a:

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geqslant \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geqslant \frac{r \log 2r}{4 p_k} \geqslant c\, \frac{p_r}{p_k}.$$

Toute solution de ξ'_1 est donc solution de l'inéquation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots \leqslant \frac{1}{c} p_k \log p_{k+1}$$

et d'après le lemme précédent, on a:

$$\log N'_1 = O(\sqrt{p_k})$$

et le nombre de solutions de ξ_1 vérifie:

$$\log N_1 = O(\sqrt{p_k}).$$

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de ξ_2 vérifie:

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}).$$

Ce qui entraine:

$$\log (\text{card } E'_k) \leqslant \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et:

$$\text{card } E_k \leqslant p_{k+1} (\text{card } E'_k) = \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right).$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω-largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_l(X)$ de tels nombres $\leqslant X$ vérifie, en posant $A_{k_o} \leqslant X < A_{k_o+1}$, ce qui entraine $\log X \sim p_{k_o}$:

$$Q_l(X) \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right) \leqslant k_0 \exp\left(O(\sqrt{p_{k_0}})\right) \leqslant \exp(c_2 \sqrt{\log X}).$$

Remarque. On peut conjecturer que $\log Q_l(X) \sim \pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\log X}$. En effet si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k, on peut assimiler $\log \frac{p_{k+r}}{p_k}$ à $r \frac{\log p_{k+1}}{p_k}$ et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leqslant p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{p_k}$.

§ 2. Démonstration du théorème 2

Minoration : Posons $k = \left[\frac{c \log x}{\log \log x}\right] + 1$ et $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Chebichev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x}$. Il y en a $\left[\frac{x}{A_k}\right]$ qui sont inférieurs à x. On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k/\log^2 p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + o(1)\right).$$

Il vient en posant $l = \log x$, $l_2 = \log \log x$, $l_3 = \log \log \log x$:

$$k = \frac{c\,l}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)\left(1 + o(1)\right) l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geqslant \left[\frac{x}{A_k}\right] \geqslant x^{1-c} \exp\left(c(1 - \log c)\left(1 + o(1)\right) \frac{\log x}{\log \log x}\right).$$