

## 8. Character sum analogues of (1), (1a) and (1b)

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **27 (1981)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Now replace  $u$  by  $tu$  to get

$$(28) \quad E = \sum_{u,t} \chi_1 \chi_2 \chi_3 (t) \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2 (1-t) \bar{\chi}_1 (u) \chi_1 \chi_2 (1-u) \{1 + \phi (ut)\} \\ = J (\chi_1 \chi_2 \chi_3, \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2) J (\bar{\chi}_1, \chi_1 \chi_2) + J (\chi_1 \chi_2 \chi_3 \phi, \bar{\chi}_1 \bar{\chi}_2) J (\bar{\chi}_1 \phi, \chi_1 \chi_2),$$

where the Jacobi sums  $J$  are defined above (18). Since  $\chi_1^2, \chi_2^2, \chi_3^2$ , and  $\chi_1 \chi_2$  are nontrivial, (5) now follows from (18).

*Remark.* If  $\chi_1 \chi_2, \chi_1 \chi_3$ , or  $\chi_2 \chi_3$  is trivial, we can easily evaluate  $E$  directly from its definition. Otherwise,  $E$  can be evaluated simply from (28).

8. CHARACTER SUM ANALOGUES OF (1), (1a) AND (1b)

Let  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \phi$  be characters on  $GF(q)$ , where  $\phi$  has order 2,  $p > 2$ . Set  $t_0 = 1$ . The discriminant of the polynomial

$$F(y) = \sum_{i=0}^n t_i y^{n-i}$$

is a polynomial in  $t_1, \dots, t_n$  which shall be denoted by  $D_n$ . Write

$$E_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i t_i.$$

We conjecture that the following analogues of (1), (1a), (1b) hold for each  $n \geq 1$ :

$$(29) \quad \sum_{t_1, \dots, t_n \in GF(q)} \chi_1 (t_n) \chi_2 (E_n) \chi_3 \phi (D_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-G(\chi_3^{j+1}) G(\chi_1 \chi_3^j) G(\chi_2 \chi_3^j)}{G(\chi_3) G(\chi_1 \chi_2 \chi_3^{n+j-1})},$$

provided that the  $n$  characters  $\chi_1 \chi_2 \chi_3^{n+j-1}$  ( $0 \leq j \leq n-1$ ) are all nontrivial;

$$(29a) \quad \sum_{t_1, \dots, t_n \in GF(q)} \chi_1 (t_n) \chi_3 \phi (D_n) \zeta^{T(t_1)} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-G(\chi_3^{j+1}) G(\chi_1 \chi_3^j)}{G(\chi_3)}$$

for all  $\chi_1, \chi_3$ ; and

$$(29b) \quad \sum_{t_1, \dots, t_n \in GF(q)} \chi_3 \phi (D_n) \zeta^{\frac{p+1}{2} T(t_1^2 - 2t_2)} = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{-\phi(2) G(\phi) G(\chi_3^{j+1})}{G(\chi_3)}$$

for all  $\chi_3$ .

Formulas (29), (29a), and (29b) have been verified by computer for some small primes  $q$  with  $n = 3, 4$ . Of course the formulas are well known for  $n = 1$ . For

$n = 2$ , (29a) and (29b) are not hard to prove, and (29) follows from the proof of (4). (For example, if  $\chi_3$  in (29) is trivial, one makes use of (19) and (21)-(23).)

For  $n = 3$ , we can prove (29b), but not (29) or (29a). The *ad hoc* proof given below appears to shed little light on the general case.

**THEOREM.** For  $n = 3$ , (29b) holds.

*Proof.* All rational fractions below are to be interpreted as integers (mod  $p$ ); for example,  $\frac{1}{2}$  equals  $(p+1)/2$ . We must show that

$$(30) \quad A = \sum_{t, u, v} \chi \phi(D_3) \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) = - \frac{\phi(2) G^3(\phi) G(\chi^3) G(\chi^2)}{G^2(\chi)}$$

for any character  $\chi$  on  $GF(q)$ , where

$$D_3 = u^2v^2 - 4u^3 - 4tv^3 - 27t^2 + 18tuv.$$

First suppose that  $p = 3$ . Then

$$\begin{aligned} A &= \sum_{t, u, v} \chi \phi(u^2v^2 - u^3 - tv^3) \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) \\ &= \sum_{v \neq 0} \sum_u \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) \sum_t \chi \phi(u^2v^2 - u^3 - t) + \sum_{t, u} \phi \chi^3(-u) \zeta^T(-u) \\ &= 0 - q G(\phi \chi^3) = -q G(\chi \phi), \end{aligned}$$

since  $G(\psi^p) = G(\psi)$  for any character  $\psi$ . Now (30) follows with the aid of (26).

Next, suppose that  $p > 3$ . Completing the square in  $t$ , one has

$$D_3/27 = c - \left(t + \frac{2v^3}{27} - \frac{uv}{3}\right)^2,$$

where  $c = \frac{4}{27} \left(\frac{v^2}{3} - u\right)^3$ . Thus

$$\begin{aligned} \bar{\chi} \phi(27) A &= \sum_{t, u, v} \chi \phi(c - t^2) \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) \\ &= \sum_{u, v} \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) \sum_t \chi \phi(c - t) \cdot \{1 + \phi(t)\} \\ &= \sum_{u, v} \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) \sum_t \chi \phi(c - t) \phi(t) \\ &= K \sum_{\substack{u, v \\ c=0}} \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right) + J \sum_{u, v} \chi(c) \zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right), \end{aligned}$$

where  $K = \chi\phi(-1) \sum_t \chi(t)$  and  $J = \sum_t \chi\phi(1-t)\phi(t)$ .

Thus

$$\bar{\chi}\phi(27)A = K \sum_v \zeta^T\left(\frac{v^2}{6}\right) + \chi\left(\frac{4}{27}\right)J \sum_{u,v} \chi^3\left(\frac{v^2}{3} - u\right)\zeta^T\left(\frac{v^2}{2} - u\right).$$

Replace  $u$  by  $u + \frac{v^2}{3}$  to obtain

$$\begin{aligned} \bar{\chi}\phi(27)A &= -K\phi(6)G(\phi) + \chi\left(\frac{4}{27}\right)J \sum_{u,v} \chi^3(-u)\zeta^T\left(\frac{v^2}{6} - u\right) \\ &= \phi(6)G(\phi)\left\{-K + \chi\left(\frac{4}{27}\right)JG(\chi^3)\right\}. \end{aligned}$$

If  $\chi$  is trivial, then  $K = \phi(-1)(q-1)$ ,  $J = -\phi(-1)$ , and  $G(\chi^3) = 1$ , and the desired result (30) follows. If  $\chi$  is nontrivial, then  $K = 0$  and

$$J = -G(\chi\phi)G(\phi)/G(\chi)$$

by (18), and (30) follows with the aid of (26).

REFERENCES

[1] ASKEY, R. Some basic hypergeometric extensions of integrals of Selberg and Andrews. *SIAM J. Math. Anal.* 11 (1980), 938-951,  
 [2] BOYARSKY, M.  $p$ -adic gamma functions and Dwork cohomology. *Trans. Amer. Math. Soc.* 257 (1980), 359-369.  
 [3] DAVENPORT, H. und H. HASSE. Die Nullstellen der Kongruenzzetafunktionen in gewissen zyklischen Fällen. *J. Reine Angew. Math.* 172 (1934), 151-182.  
 [4] EVANS, R., J. PULHAM and J. SHEEHAN. On the number of complete subgraphs contained in certain graphs. *J. Combinatorial Theory* (to appear).  
 [5] GRAS, G. Sommes de Gauss sur les corps finis. *Publ. Math. Besançon* 1 (1977-1978), 1-71.  
 [6] GROSS, B. and N. KOBLITZ. Gauss sums and the  $p$ -adic  $\Gamma$ -function. *Annals of Math.* 109 (1979), 569-581.  
 [7] SELBERG, A. Private correspondence, Summer, 1980.  
 [8] STICKELBERGER, L. Über eine Verallgemeinerung der Kreistheilung. *Math. Ann.* 37 (1890), 321-367.  
 [9] THOMASON, A. Ph.D. Thesis, Cambridge University, 1979.

(Reçu le 18 septembre 1980)

Ronald J. Evans

Department of Mathematics  
 University of California, San Diego  
 La Jolla, CA 92093