

# Appendix 2

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$$T_{m+s+1}(\mathbf{x}, \mathbf{c}) T_{m+s+1}(\mathbf{x}, \mathbf{c}') S_{m+r+1}(\mathbf{x}, \mathbf{e})$$

where  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{e})$  is a fixed  $(0, 1)$ -vector of  $2s+r+3$  elements. But any such vector can be specified by a conjunction of  $2s+r+3$  Boolean literals. Consider the disjunction of the  $r$  such conjunctions and let  $R(\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{e})$  be the polynomial that simulates this Boolean formula at  $(0, 1)$  values. Then clearly

$$Q_m(x) = \sum T(\mathbf{x}, \mathbf{c}) T(\mathbf{x}, \mathbf{c}') S(\mathbf{x}, \mathbf{e}) R(\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{e}),$$

where summation is over  $(\mathbf{c}, \mathbf{c}', \mathbf{e}) \in \{0, 1\}^{2s+r+3}$ .

Let  $A(C, d)$  be the upper bound over every homogeneous polynomial having degree  $d$  and homogeneous program complexity  $C$ , of the minimal size of formula needed to define it in Definition 4. Then the above recursive expression ensures that

$$A(C, d) \leq 3A(3C + d, \lfloor d/2 \rfloor + 1) + O(C).$$

Clearly also  $A(C, 1) \leq 2C$ . Hence if  $d$  is  $p$ -bounded in  $m$  then so is the solution to this recurrence. □

### APPENDIX 2

For completeness we describe here a direct proof of the  $p$ -definability of  $HC$  in the sense of Definition 1.  $HC_{n \times n}(x_{i,j})$  will be the projection under

$$\sigma(u_{k,m}) = 1 \quad \text{for} \quad 1 \leq k, m \leq n$$

of the polynomial in  $\{x_{i,j}, u_{k,m}\}$  defined by

$$Q_{n \times n}(y_{i,j}) \cdot Q_{n \times n}(z_{k,m}) \cdot R^1 \dots R^n$$

with the association  $y_{i,j} \leftrightarrow x_{i,j}$  and  $z_{k,m} \leftrightarrow u_{k,m}$ . Here  $Q_{n \times n}$  is the polynomial that defines the permanent in §3. Its first occurrence with argument  $y$  plays exactly the same role as in the permanent and ensures a cycle cover. The intention of  $z_{k,m}$  is to denote whether the  $k^{\text{th}}$  node in the circuit (starting from node 1, say) is node  $m$ .  $Q_{n \times n}(z_{k,m})$  ensures that this intention is realised. For each  $k$   $R^k$  captures the fact that if  $z_{k,m}$  and  $z_{k+1,r}$  are both 1 then  $y_{m,r}$  must be also. In Boolean notation we require

$$y_{m,r} \vee (\bar{z}_{k,m} \vee \bar{z}_{k+1,r}).$$

As is well known such Boolean formulae can be simulated by polynomials at  $\{0, 1\}$  values (e.g. see Proposition 2 in [13]). To guarantee just one monomial for each cycle we fix  $R^1 = z_{11}$ . □