1) DISKUSSION DES RESULTATS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

EINIGE UNENTSCHEIDBARE KÖRPERTHEORIEN *

von Martin ZIEGLER

Professor E. Specker zum sechzigsten Geburtstag

0) EINLEITUNG

Wir konstruieren in dieser Arbeit eine Reihe von Körpern, in denen sich der Ring der ganzen Zahlen interpretieren läßt. Als Folgerung ergibt sich:

Eine endlich axiomatisierte Theorie, die einen algebraisch abgeschlossenen Körper, **R** (den Körper der reellen Zahlen) oder einen der p-adischen Körper $\mathbf{Q}_p$ als Modell hat, ist erblich unentscheidbar.

Insbesondere haben wir: (Fall **R**)

Die Theorie der euklidischen Körper ist erblich unentscheidbar.
Die Theorie der pythagoräischen Körper ist erblich unentscheidbar.

(Ein formal-reeller Körper ist *euklidisch*, wenn jedes Element Quadrat oder Negatives eines Quadrates ist, und *pythagoräisch*, wenn jede Quadratsumme Quadrat ist.)

Die Frage nach der Entscheidbarkeit der euklidischen Körper wurde 1959 von Tarski gestellt ([T]). Der Fall **R** unseres oben angegebenen Satzes wurde in [T] vermutet.

Tarskis Problem wurde bisher nur von K. Hauschild behandelt ([H 1], [H 2]). Sein Beweis für die Unentscheidbarkeit der pythagoräischen Körper ist jedoch fehlerhaft und irreparabel (siehe [C], [F]). Unsere Konstruktion verwendet einige grundsätzliche Ideen Hauschilds: „q-te Wurzeln", „Bewertungen", „schrittweise Konstruktion".

Ich danke A. Prestel und U. Henschel für ihre Unterstützung.

1) DISKUSSION DES RESULTATS

F_p sei der Körper mit p Elementen. L_p der algebraische Abschluß des rationalen Funktionenkörpers $F_p(t)$.

---

* This article has already been published in *Logic and Algorithmic*, an international Symposium in honour of Ernst Specker, Zürich, February 1980. Monographie de L'Enseignement Mathématique N° 30, Genève 1982.

Wir zeigen in den Abschnitten 2)—5) den

SATZ. q sei eine Primzahl, A eine abzählbare Struktur, L sei einer der Körper L_p $(p \neq q)$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}_p$

Dann gibt es einen Körper $K \subset L$ mit

(1) A läßt sich in K interpretieren;

(2) Wenn der Zwischenkörper $H \subset L$ endlich über K ist, ist der Grad $[H : K]$ gleich 1 oder durch q teilbar.

Wenn L die Charakteristik o hat und $A = (\mathbf{Z}, +, \cdot)$, ist $\mathbf{Z}$ als Teilmenge von K definierbar.

Wir zeigen den in o) angegebenen Satz:

FOLGERUNG. Jede endliche Teiltheorie der Theorie von L ist erblich unentscheidbar.

Beweis : T sei eine endliche Teiltheorie von $Th\,(L)$. P sei die Menge aller von der Charakteristik von L verschiedenen Primzahlen. Zu jedem $q \in P$ wählen wir einen Körper K_q, für den (2) gilt und in dem $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$ interpretierbar ist. Wir wählen einen Nicht-Hauptultrafilter U auf P.

$$K = \prod_{q \in P} K_q \,/\, U$$

ist dann relativ algebraisch abgeschlossen in $L^P/_U$. Daraus folgt nun $K \equiv L$. (Die hier gebrauchte (Modell-) Theorie der algebraisch-, reell- und p-adisch abgeschlossenen Körper findet man in [CK], [M], [K], [AK].)

K ist somit ein Modell von T, folglich ist auch einer der Körper K_q ein Modell von T (denn T ist endlich). T hat also ein Modell, in dem der Ring der ganzen Zahlen interpretierbar ist. Damit folgt die Behauptung aus [TMR].

Um weitergehende Folgerungen aus unserem Satz zu gewinnen, definieren wir eine Reihe von elementaren Theorien. Den Nachweis, daß diese Theorien wirklich „elementar" sind überlassen wir dem Leser. (Man beachte, daß die „p-Bewertung" in Modellen von $T^H_{p,q}$ elementar definierbar ist.)

$T^A_{p,q}$ = die Theorie der Körper der Charakteristik p, in denen der Grad jedes irreduziblen Polynoms = 1 oder durch q teilbar ist. (p prim oder = o);

T^R_2 = die Theorie der formal reellen Körper, in denen der Grad jedes irreduziblen Polynoms = 1 oder gerade ist;

T^R_q = die Theorie der formal reellen Körper mit:

a) der Grad jedes irreduziblen Polynoms, das in einer formal reellen Erweiterung eine Nullstelle hat, ist $= 1$ oder durch q teilbar;

b) der Körper liegt dicht in seinem reellen Abschluß. $(q \neq 2)$;

$T^H_{p,q}$ = die Theorie der formal p-adischen Körper mit:

a) der Grad jedes irreduziblen Polynoms, das in einer formal p-adischen Erweiterung eine Nullstelle hat, ist $= 1$ oder durch q teilbar;

b) der Körper liegt dicht in seinem p-adischen Abschluß.

Man kann sich leicht überlegen, daß alle diese Theorien (wobei noch für $T^A_{p,q}$ $p \neq q$ gefordert sei), einen der im Satz angegebenen Körper K als Modell haben. Also gilt die

FOLGERUNG. — Die Theorien $T^A_{p,q}$ $(p \neq q)$, T^R_q, $T^H_{p,q}$ sind erblich unentscheidbar.

Ohne Beweis sei noch eine Reihe von Bemerkungen angefügt:

Jede endliche Theorie, die einen der betrachteten Körper L als Modell hat, ist für genügend großes q Teiltheorie einer der Theorien $T^A_{p,q}$, T^R_q, T^H_q. Die Theorie der euklidischen Körper ist für $q \neq 2$ in T^R_q enthalten.

Ein Körper K der Charakteristik p ist ein Modell von $T^A_{p,q}$ *gdw.* jedes Polynom aus $K[X]$, dessen Grad nicht durch q teilbar ist, eine Nullstelle in K hat *gdw.* der Grad jeder endlichen Erweiterung von K eine q-Potenz ist.

Ein formal reeller Körper ist ein Modell von T^R_2 *gdw.* jedes Polynom ungeraden Grades eine Nullstelle hat *gdw.* der Grad jeder endlichen formal reellen Erweiterung eine 2-Potenz ist.

$(R, <)$ sei dicht im reell abgeschlossenen Körper $(L, <)$. Dann ist R genau dann ein Modell von T^R_q, wenn der Grad jedes irreduziblen Polynoms, welches das Vorzeichen wechselt, $= 1$ oder durch q teilbar ist.

Der bewertete Körper (H, w) sei dicht im p-adisch abgeschlossenen Körper (L, v), $w \subset v$. Dann ist H genau dann ein Modell von $T^H_{p,q}$, wenn der Grad jedes irreduziblen Polynoms, dass die Voraussetzung von Hensels Lemma erfüllt, $= 1$ oder durch q teilbar ist.

Offene Fragen:

$T^A_{q,q}$ ist Untertheorie der (entscheidbaren) Theorie der separabel abgeschlossenen Körper der Charakteristik q (siehe [E]). Ist $T^A_{q,q}$ oder $T^A_{q,q} + \forall x \exists y \; y^q = x$ entscheidbar?

Für $q_1 \neq q_2$ ist $T^A_{p,q_1} + T^A_{p,q_2}$ die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p. Für $q \neq 2$ ist $T^R_2 + T^R_q$ die Theorie der reell abgeschlossenen Körper. Sind für verschiedene q_i, $n \geqslant 1$, die Theorien $T^H_{p,q_0} + \ldots + T^H_{p,q_n}$ und $(q_i \neq 2)$ $T^R_{q_0} + \ldots + T^R_{q_n}$ entscheidbar?

K ist erblich quadratisch abgeschlossen, wenn jede algebraische Erweiterung von K quadratisch abgeschlossen ist. Die Theorie der erblich quadratisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p ist als Untertheorie von $T^A_{p,q}$, $q \neq 2$, erblich unentscheidbar. Ist die Theorie der erblich euklidischen Körper entscheidbar?

2) Konstruktion von M

Wir halten ab jetzt q, A und L wie in der Voraussetzung des Satzes fest. F sei der relative algebraische Abschluß des Primkörpers von L.

Lemma. Es gibt eine Teilmenge M von F, so daß sich A in (F, M) interpretieren läßt und

(3) $o \in M$; der Index der von M erzeugten additiven Untergruppe von F ist unendlich.

Beweis: Zunächst bemerken wir daß F unendliche Erweiterung des Primkörpers ist.

Im Fall $(\mathbf{Z}, +, \cdot) = A$, o = Charakteristik von L, setzen wir $M = \mathbf{Z}$. Sonst können wir annehmen, daß $A = (A, R)$, R symmetrisch und irreflexiv. Denn jede Struktur läßt sich in einem Graphen interpretieren. A sei durch $a_0, a_1, \ldots$ ohne Wiederholung aufgezählt. Wir fassen F als Vektorraum über seinem Primkörper auf. $B = \{b_0, b_1, \ldots\}$ sei Basis eines unendlichdimensionalen Untervektorraums von unendlicher Kodimension. Wir übertragen R auf B: $S(b_i, b_j)$ gdw. $R(a_i, a_j)$, also $(A, R) \cong (B, S)$. c_1, c_2 seien linear unabhängig über B.

Wir setzen jetzt

$$M = \{o\} \cup B \cup \{c_1 + b_i \mid i \in \mathbf{N}\}$$
$$\cup \{c_2 + b_i \mid i \in \mathbf{N}\} \cup \{b_i + b_j \mid S(b_i, b_j)\}$$

Dann können wir B und S (mit Parametern c_1, c_2) definieren:

$$B = \{b \in M \mid c_1 + b \in M\,,\ c_2 + b \in M\}$$
$$S = \{(b, c) \mid b \in B\,,\ c \in B\,,\ b + c \in M\,,\ b \neq c\}$$