

4) Die Eigenschaften von K

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Für $r \in F^*$ hat $t^q - r$ keine mehrfachen Faktoren (in $F[t]$). Es gibt also eine auf F triviale Bewertung \bar{v}_r von $F(t)$, für die $\bar{v}_r(t^q - r)$ das kleinste positive Element von $G_{\bar{v}_r}$ ist. Wir wählen für jedes r eine Fortsetzung w_r von \bar{v}_r auf E_i . Dann ist $G_{\bar{v}_r} = G_{w_r}$ für fast alle r . Die Menge

$$C = \{r \in F^* \mid q \text{ teilt } w_r(t^q - r)\}$$

ist also endlich. Wir bemerken noch, daß $w_r(t^q - r') = 0$, wenn $r \neq r'$. Wir wählen jetzt $r_1 \in F$ so, daß $r_1 \neq 0$, $a_n, 2r_1 \neq a_n$ und r_1 in keiner der Mengen

$$C, a_n - C, M - B, a_n - (M - B)$$

liegt. Es sei $r_2 = a_n - r_1$. Lemma 3 liefert uns $s_i \in F^*$ mit $s_i(t^q - r_i) \in L^q$. Wir setzen

$$(E_{i+1}, S_{i+1}) = (E_i, S_i \cup \{s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2)\}).$$

Es muß noch (4) gezeigt werden.

Weil q $w_{r_1}(t^q - r_1)$ und $w_{r_2}(t^q - r_2)$ nicht teilt, gilt zunächst (4.1) für die Bewertungen w_{r_1}, w_{r_2}, v_s , ($s \in S_i$). Um (4.2) zu zeigen, seien $\bar{r}_1 \neq \bar{r}_2 \in F$, $\bar{r}_1 + \bar{r}_2 \in M$ gegeben. Es ist dann z.B. für alle $s \in S_i$ $v_s(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar. Wenn auch $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ und $w_{r_2}(t^q - \bar{r}_1)$ durch q teilbar sind, sind wir fertig. Sei also z.B. $w_{r_1}(t^q - \bar{r}_1)$ nicht q -teilbar. Dann ist $r_1 = \bar{r}_1$, $r_i \neq \bar{r}_2$ und $\bar{r}_2 \in M - r_1$. Folglich ist $w_{r_i}(t^q - \bar{r}_2) = 0$, und alle $v_s(t^q - \bar{r}_2)$, ($s \in S_i$), sind durch q teilbar.

Damit ist die Konstruktion von K abgeschlossen.

4) DIE EIGENSCHAFTEN VON K

Wir zeigen in diesem Abschnitt (2) und

$$(5) \quad (K \cap L^q) \setminus K^q = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$(5') \quad K \setminus F^* \cdot K^q = F^* \cdot \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i \right)$$

$$(6) \quad F = \{a \in K \mid \forall b \in L^q \quad (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in K^q\}$$

$$(6') \quad F = \{a \in K \mid \forall b \in K \quad (1 + b \in K^q \ \& \ a^q + b^{-1} \in K^q) \Rightarrow b \in F^* \cdot K^q\}$$

$$(7) \quad M = \{r \in F \mid \forall r_1, r_2 \in F \quad (r_1 \neq r_2 \ \& \ r_1 + r_2 = r) \Rightarrow (t^q - r_1 \in F^* \cdot K^q \text{ oder } t^q - r_2 \in F^* \cdot K^q)\}$$

Beweis von (2): Sei $K \subset H \subset L$ und H endlich über K . Wir wollen zeigen, daß q den Grad $[H:K]$ teilt. Wir können $H = K(a)$ annehmen. Für beliebig große n ist $a = a_n$. Wir wählen n so groß, daß

$$[E_{4n}(a) : E_{4n}] = [K(a) : K].$$

In der Konstruktion tritt bei $i = 4n$ der Fall a) ein. Also teilt q

$$[E_{4n}(a) : E_{4n}].$$

Beweis von (5) und (5') :

„ \supset “ Sei $a \in F^* \cdot K^q$. Für alle genügend großen i ist dann $a \in F^* \cdot E_i^q$ und $v(a)$ für alle auf F trivialen v durch q teilbar. Nach (4.1) liegt a nicht in $F^* \cdot S_i$.

„ \subset “ Sei $a \in K \setminus F^* \cdot K^q$. Nach Lemma 3 wählen wir $f \in F^*$ mit $\bar{a} = af \in L^q$. Wir haben jetzt $\bar{a} \in (K \cap L^q) \setminus K^q$.

Es sei $a_n = \bar{a}$ und n so groß, daß $\bar{a} \in E_{4n+1}$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+1$ der Fall b) ein. Also ist $\bar{a} \in S_{i+1}$. Daraus folgt $a \in F^* \cdot S_{i+1}$.

Beweis von (6) und (6') :

„ \subset “ Sei $a \in F$. Für ein $b \in K$ sei $1 + b \in K^q$ und $a^q + b^{-1} \in K^q$. i sei so groß daß $1 + b \in E_i^q$ und $a^q + b^{-1} \in E_i^q$. v sei eine auf F triviale Bewertung von E_i . Wenn $v(b) > 0$, ist $v(b) = -v(a^q + b^{-1})$ durch q teilbar. Wenn $v(b) < 0$, ist $v(b) = v(1 + b)$ durch q teilbar. Weil also $v(b)$ immer durch q teilbar ist, ist nach (4) $b \notin F^* \cdot S_i$. (5') ergibt $b \in F^* \cdot K^q$. Wenn $b \in L^q$, folgt aus (5), daß $b \in K^q$.

„ \supset “ Sei $a \in K \setminus F$. n sei so groß, daß $a \in E_{4n+2}$, und es sei $a = a_n$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n+2$ der Fall b) ein. In S_{i+1} gibt es dann ein b mit $1 + b, a^q + b^{-1} \in E_{i+1}^q$. Wir haben also

$$b \in L^q, 1 + b \in K^q, a^q + b^{-1} \in K^q, b \notin F^* \cdot K^q.$$

Beweis von (7) :

„ \subset “ Sei $r_1 + r_2 \in M$, $r_1 \neq r_2$. Wenn die $t^q - r_1$ beide nicht in $F^* \cdot K^q$ sind, ist nach (5') $t^q - r_1, t^q - r_2 \in F^* \cdot S_i$ für genügend großes i . Das widerspricht aber (4).

„ \supset “ Sei $r = a_n \in F \setminus M$. In der Konstruktion tritt bei $i = 4n + 3$ der Fall b) ein. Es gibt dann $r_1 \neq r_2 \in F$, $r_1 + r_2 = r$ und $s_i \in F^*$, für die $s_1(t^q - r_1), s_2(t^q - r_2) \in S_{i+1}$. Also nach (5') $t^q - r_1, t^q - r_2 \notin F^* \cdot K^q$.