

## 2.4. Notes

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Substitution of (2.23) and (2.22) yields ( $m \geq n$ ):

$$\begin{aligned}
 (2.28) \quad & \pi_{\xi, \lambda, m, n}(a_t) \\
 &= \frac{(\lambda + n + \frac{1}{2})_{m-n}}{(m-n)!} (sh \frac{1}{2}t)^{m-n} (ch \frac{1}{2}t)^{-m-n} \phi_{2i\lambda}^{(m-n, -m-n)}(\frac{1}{2}t) \\
 &= \frac{(\lambda + n + \frac{1}{2})_{m-n}}{(m-n)!} (sh \frac{1}{2}t)^{m-n} (ch \frac{1}{2}t)^{m+n} \phi_{2i\lambda}^{(m-n, m+n)}(\frac{1}{2}t).
 \end{aligned}$$

Application of (2.16) gives a similar result in the case  $m < n$ . Finally we conclude:

**THEOREM 2.1.** *The canonical matrix elements  $\pi_{\xi, \lambda, m, n}(a_t)$  ( $\lambda \in \mathbf{C}$ ;  $\xi = 0$  or  $\frac{1}{2}$ ;  $m, n \in \mathbf{Z} + \xi$ ;  $t \in \mathbf{R}$ ) of  $SU(1, 1)$  can be expressed in terms of Jacobi functions by*

$$(2.29) \quad \pi_{\xi, \lambda, m, n}(a_t) = \frac{c_{\xi, \lambda, m, n}}{(|m-n|)!} (sh \frac{1}{2}t)^{|m-n|} (ch \frac{1}{2}t)^{m+n} \phi_{2i\lambda}^{(|m-n|, m+n)}(\frac{1}{2}t),$$

where

$$(2.30) \quad c_{\xi, \lambda, m, n} := \begin{cases} (\lambda + n + \frac{1}{2})_{m-n} & \text{if } m \geq n, \\ (\lambda - n + \frac{1}{2})_{n-m} & \text{if } n \geq m. \end{cases}$$

In view of (2.24), formulas (2.29) and (2.30) describe the asymptotics of  $\pi_{\xi, \lambda, m, n}$  near  $t = 0$ .

## 2.4. NOTES

2.4.1. The principal series of representations was first written down for  $SL(2, \mathbf{R})$  by BARGMANN [2], for  $SL(2, \mathbf{C})$  by GELFAND & NAIMARK [18], and for a general noncompact semisimple Lie group by HARISH-CHANDRA [21, §12].

2.4.2. BARGMANN [2, §10] already obtained explicit expressions in terms of hypergeometric functions for the canonical matrix elements of the irreducible unitary representations of  $SL(2, \mathbf{R})$ . He solved the differential equation satisfied by these matrix elements, which is obtained from the Casimir operator. VILENKIN [43, Ch. VI, §3] gives a derivation of these expressions which is similar to our derivation in §2.4, starting from the integral representation (2.15).

2.4.3. It follows from the present paper that the spherical functions for  $SL(2, \mathbf{R})$  can be expressed as Jacobi functions of order  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ . More generally, the spherical functions on any noncompact real semisimple Lie group

of rank 1 (i.e.,  $\dim(A) = 1$ ) can be written as Jacobi functions of certain order (cf. HARISH-CHANDRA [23, §13]). This motivated FLENSTED-JENSEN [14] to study harmonic analysis for Jacobi function expansions of quite general order  $(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha \geq \beta \geq -\frac{1}{2}$ . This research was continued in several papers by Flensted-Jensen and the author.

### 3. THE IRREDUCIBLE SUBQUOTIENT REPRESENTATIONS OF THE PRINCIPAL SERIES

#### 3.1. SUBQUOTIENT REPRESENTATIONS

We start with the definition and some general properties and next derive an irreducibility criterium (Theorem 3.2) and a decomposition theorem 3.3.

Let  $G$  be a lcsc. group and let  $\tau$  be a Hilbert representation of  $G$ . Let  $\mathcal{H}_0$  be a closed subspace of  $\mathcal{H}(\tau)$  and let  $P_0$  be the orthogonal projection from  $\mathcal{H}(\tau)$  onto  $\mathcal{H}_0$ . Define

$$(3.1) \quad \tau_0(g)v := P_0\tau(g)v, \quad g \in G, v \in \mathcal{H}_0.$$

Then  $\tau_0(g) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_0)$  for each  $g \in G$ ,  $\tau_0(e) = id.$ , and  $g \rightarrow \tau_0(g)v: G \rightarrow \mathcal{H}_0$  is continuous for each  $v \in \mathcal{H}_0$ . If also

$$(3.2) \quad \tau_0(g_1g_2) = \tau_0(g_1)\tau_0(g_2), \quad g_1, g_2 \in G,$$

then  $\tau_0$  is a Hilbert representation of  $G$  on  $\mathcal{H}_0$  and it is called a *subquotient representation* of  $\tau$ . Formula (3.2) is clearly valid if  $\mathcal{H}_0$  is an *invariant subspace* of  $\mathcal{H}(\tau)$ , i.e., if  $\tau(g)v \in \mathcal{H}_0$  for all  $g \in G$ ,  $v \in \mathcal{H}_0$ . In that case,  $\tau_0$  is called a *subrepresentation* of  $\tau$ .

LEMMA 3.1. Let  $\mathcal{H}_0$  be a closed subspace of  $\mathcal{H}(\tau)$ , let  $\mathcal{H}_2$  be the closed  $G$ -invariant subspace of  $\mathcal{H}(\tau)$  which is generated by  $\mathcal{H}_0$  and let  $\mathcal{H}_1 := \mathcal{H}_2 \cap \mathcal{H}_0^\perp$ . Then  $\tau_0$  is a subquotient representation if and only if  $\mathcal{H}_1$  is  $G$ -invariant.