

## 6.2. The case $SU(1, 1)$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

(b)  $\Rightarrow$  (a) : Assume (b). Then  $A$  is self-adjoint and positive definite. Define a new inner product  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  on  $\mathcal{D}(A)$  by  $\langle v, w \rangle := (Av, w)$ . Then, for  $v, w \in \mathcal{D}(A)$ ,  $g \in G$ , we have:

$$\begin{aligned} \langle \tau(g)v, \tau(g)w \rangle &= (A\tau(g)v, \tau(g)w) = (\tilde{\tau}(g^{-1})A\tau(g)v, w) \\ &= (A\tau(g^{-1})\tau(g)v, w) = (Av, w) = \langle v, w \rangle, \end{aligned}$$

i.e.  $\langle \tau(g)v, \tau(g)w \rangle = \langle v, w \rangle$ . Thus  $\tau$  is a unitary representation on  $\mathcal{D}(A)$  with respect to the new inner product. (Weak continuity of  $\tau$  is easily proved.) Let  $\sigma$  be the extension of this representation to a unitary representation in the Hilbert space completion  $\mathcal{H}(\sigma)$  of  $\mathcal{D}(A)$  with respect to  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Then  $\tau \simeq \sigma$ , where  $B$  is the closure of the identity operator on  $\mathcal{D}(A)$  (cf. Lemma 4.4). Note that we have also proved the last part of the theorem.

The equivalence of (c) or (d) with (b) follows from Theorem 4.5.  $\square$

## 6.2. THE CASE $SU(1, 1)$

It follows from (2.30) that

$$(6.4) \quad \overline{c_{\xi, \lambda, n, m}} = (-1)^{m-n} c_{\xi, -\bar{\lambda}, m, n}.$$

Combination of (6.3), (2.29) and (6.4) yields

$$(6.5) \quad \tilde{\pi}_{\xi, \lambda} = \pi_{\xi, -\bar{\lambda}}.$$

In §6.1 we showed that a necessary condition for unitarizability of an irreducible subquotient representation  $\tau$  of  $\pi_{\xi, \lambda}$  is the equivalence of  $\tau$  and  $\tilde{\tau}$ . In view of (6.5) and Theorem 4.7 this is only possible if  $\bar{\lambda} = \pm\lambda$ , that is, if  $\lambda$  is real or imaginary. If  $\lambda$  is imaginary then  $\tilde{\pi}_{\xi, \lambda} = \pi_{\xi, \lambda}$ , so  $\pi_{\xi, \lambda}$  is already unitary. Let us now examine the case that  $\lambda$  is real and nonzero. Then  $\tilde{\pi}_{\xi, \lambda} = \pi_{\xi, -\lambda}$ . If  $\tau$  is an irreducible subquotient representation of  $\pi_{\xi, \lambda}$  then  $\tau \stackrel{A}{\simeq} \tilde{\tau}$  with (cf. (4.10))

$$(6.6) \quad A\phi_m = c_{\xi, \lambda, m} \phi_m, \phi_m \in \mathcal{H}(\tau),$$

where  $c_{\xi, \lambda, m}$  is given by (4.9). Now a sufficient condition for the unitarizability of  $\tau$  is that the coefficients  $c_{\xi, \lambda, m}$  are all positive or all negative for  $\phi_m \in \mathcal{H}(\tau)$ . Referring to the classification in Theorem 3.4 we will examine these coefficients. (Because of equivalence, it is not necessary to treat the cases where  $\lambda < 0$ .)

$$(a) \quad \pi_{0, \lambda}(\lambda > 0, \lambda \notin \mathbf{Z} + \frac{1}{2}).$$

$$c_{0, \lambda, m} = \frac{(-\lambda + \frac{1}{2})_{|m|}}{(\lambda + \frac{1}{2})_{|m|}}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

$c_{0, \lambda, m}$  has fixed sign iff  $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ .

$$(b) \quad \pi_{\frac{1}{2}, \lambda}(\lambda > 0, \lambda \notin \mathbf{Z}).$$

$$c_{\frac{1}{2}, \lambda, m} = \frac{(-\lambda)_{m + \frac{1}{2}}}{(\lambda)_{m + \frac{1}{2}}}, \quad m + \frac{1}{2} \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

No fixed sign.

$$(c) \quad \pi_{\xi, \lambda}^+ \text{ and } \pi_{\xi, \lambda}^-(\lambda + \xi \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}, \lambda > 0).$$

$$c_{\xi, \lambda, m} = \frac{(|m| - (\lambda + \frac{1}{2}))!}{(2\lambda + 1)_{|m| - (\lambda + \frac{1}{2})}}, \quad m \in \mathbf{Z} + \xi, |m| \geq \lambda + \frac{1}{2}.$$

Fixed sign.

$$(d) \quad \pi_{\xi, \lambda}^0(\lambda + \xi \in \mathbf{Z} + \frac{1}{2}, \lambda > 0).$$

$$c_{\xi, \lambda, m} = \frac{(-1)^{m-\xi}}{(\lambda - \frac{1}{2} + m)!(\lambda + \frac{1}{2} - m)!}, \quad m \in \left\{ -\lambda + \frac{1}{2}, -\lambda + \frac{3}{2}, \dots, \lambda - \frac{1}{2} \right\}.$$

No fixed sign except if  $\lambda = \frac{1}{2}, \xi = 0$ .

Combining these results with Theorems 3.4, 4.7 and 5.4 and Prop. 4.2 we reobtain BARGMANN'S [2] classification of all irreducible unitary representations of  $SU(1, 1)$ :

**THEOREM 6.2.** *Any irreducible unitary representation of  $SU(1, 1)$  is unitarily equivalent to one and only one of the following representations:*

$$1) \quad \pi_{\xi, i\nu}(\xi = 0, \frac{1}{2}, \nu > 0), \pi_{0, 0}, \pi_{\frac{1}{2}, 0}^+, \pi_{\frac{1}{2}, 0}^- \text{ (unitary principal series).}$$

$$2) \quad \pi_{0, \lambda}(0 < \lambda < \frac{1}{2}) \text{ on } Cl \text{ Span}\{\dots, \phi_{-1}, \phi_0, \phi_1, \dots\}$$

with respect to the inner product

$$\langle \phi_m \phi_n \rangle := \frac{(-\lambda + \frac{1}{2})_{|m|}}{(\lambda + \frac{1}{2})_{|m|}} \delta_{m, n} \text{ (complementary series).}$$

$$3) \quad \pi_{\xi, \lambda}^+ \text{ and } \pi_{\xi, \lambda}^- \left( \xi = 0 \text{ or } \frac{1}{2}, \lambda = \xi + \frac{1}{2}, \xi + \frac{3}{2}, \dots \right)$$

on

$$Cl \text{ Span}\{\phi_{\lambda + \frac{1}{2}}, \phi_{\lambda + 3/2}, \dots\}$$

and

$$Cl \text{ Span}\{\dots, \phi_{-\lambda - 3/2}, \phi_{-\lambda - \frac{1}{2}}\},$$

respectively, with respect to the inner product

$$\langle \phi_m, \phi_n \rangle := \frac{(|m| - (\lambda + \frac{1}{2}))!}{(2\lambda + 1)_{|m| - (\lambda + \frac{1}{2})}} \delta_{m,n} \text{ (discrete series).}$$

4)  $\pi_{0, \frac{1}{2}}^0$  (identity representation).

### 6.3. NOTES

6.3.1. Following BARGMANN [2], most authors prove Theorem 6.2 by infinitesimal methods. VILENKIN [43, Ch. VI] uses the method of the present paper. TAKAHASHI [39, §6] decides about unitarizability by considering whether  $\pi_{\xi, \lambda, n, n}$  is a positive definite function on  $G$ .

6.3.2. A method related to this section was used in FLENSTED-JENSEN & KOORNWINDER [15] in order to find all irreducible unitary spherical representations of non-compact semisimple Lie groups  $G$  of rank one. They examined the nonnegativity of the coefficients in the addition formula for the spherical functions on  $G$ . See also [27, §6.4].

6.3.3. A generalization of Theorem 6.1 can be formulated for not necessarily abelian  $K$  and, partly, for  $K$ -finite  $\tau$ , cf. [27, Theorems 6.4, 6.5].