

# 1. Enoncé du théorème de base

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 1. ENONCÉ DU THÉORÈME DE BASE

Un *réseau* dans un espace vectoriel réel  $V$  de dimension finie est par définition un sous-groupe engendré par une base de  $V$ . Ainsi, si  $L$  est un réseau dans  $V$ ,  $L$  est un sous-groupe discret (fermé) et le quotient  $V/L$  est compact (on dit parfois que  $L$  est discret et *co-compact* dans  $V$ ). Pour tout réseau  $L$ , on a donc  $L \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R} = V$  par définition. Parmi les sous-groupes discrets de  $V$ , les réseaux sont aussi caractérisés par la propriété d'avoir un rang maximal.

Un *tore* (réel) est un groupe (topologique, de Lie) difféomorphe à un quotient  $V/L$  où  $V$  est un espace vectoriel réel de dimension finie et  $L$  un réseau dans  $V$ . Prenant pour base de  $V$  un système de générateurs de  $L$ , on voit que tout tore est difféomorphe à un produit de cercles

$$\begin{cases} \mathbf{R}^n \simeq V & (n = \dim V) \\ \mathbf{Z}^n \simeq L, & V/L \cong \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n = (\mathbf{R}/\mathbf{Z})^n = (S^1)^n. \end{cases}$$

Pour introduire une structure analytique complexe sur un tore (de dimension réelle paire), on peut supposer que  $V$  possède une structure complexe: cette dernière induira canoniquement une structure complexe sur le quotient. Changeons donc légèrement de notations en supposant que  $V$  est un espace vectoriel complexe de dimension *complexe*  $n$  (donc de dimension réelle double  $2n$  par restriction des scalaires) et  $L$  un réseau de  $V$  (considéré comme espace vectoriel réel, donc de rang  $2n$ ). Le tore  $V/L$  est alors une variété complexe compacte (lisse) de dimension complexe  $n$ . C'est un *tore complexe*.

Bien que deux tores complexes de même dimension soient automatiquement difféomorphes (car difféomorphes à un même produit de cercles), ils ne sont pas analytiquement isomorphes en général. Autrement dit, sur un même tore réel (de dimension paire), il existe plusieurs structures complexes non *équivalentes*. Ce phénomène apparaît déjà en dimension  $n = 1$  (courbes elliptiques). Dans  $\mathbf{C}$ , un réseau est engendré par deux éléments linéairement indépendants sur les réels; après une homothétie (qui ne change pas la structure analytique complexe) on peut supposer que ces générateurs sont 1 et un nombre complexe  $\tau$  de partie imaginaire strictement positive. Notons  $E_\tau = \mathbf{C}/(\mathbf{Z} + \tau\mathbf{Z})$  le tore complexe de dimension 1 correspondant. On peut montrer que  $E_\sigma$  et  $E_\tau$  ne sont analytiquement isomorphes que s'il existe une matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ à coefficients entiers, } ad - bc = 1,$$

avec

$$\sigma = \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \text{ (transformation fractionnaire linéaire).}$$

On connaît d'autre part les *variétés projectives*. Ce sont les sous-variétés analytiques fermées d'un espace projectif complexe. Elles sont compactes et tout point non singulier possède un voisinage qui peut être paramétrisé à l'aide de fonctions analytiques. Un théorème de Chow dit même que toute variété projective est une variété algébrique, donc définie par l'annulation simultanée d'un nombre fini de polynômes homogènes.

La question qui fait l'objet principal de ces notes est la suivante: *Quand un tore complexe  $V/L$  peut-il être plongé dans un espace projectif et donc considéré comme variété projective?* Pour être plus précis, on cherche à caractériser les tores complexes  $V/L$  pour lesquels il existe une application analytique injective

$$\theta: V/L \rightarrow \mathbf{P}^m(\mathbf{C})$$

dont la différentielle est injective en tout point (donc localement inversible au voisinage de tout point d'après le théorème des fonctions implicites analytique). Il est surprenant de constater que certains tores complexes ne possèdent pas de tel plongement projectif. On appelle *variété abélienne* un tore complexe qui possède un plongement projectif.

La réponse à la question énoncée plus haut est fournie par le théorème de base suivant.

*Soient  $V$  un espace vectoriel complexe (de dimension finie),  $L$  un réseau dans  $V$  et  $T = V/L$  le tore complexe correspondant. Pour que  $T$  soit une variété abélienne il faut et il suffit qu'il existe un produit scalaire hilbertien sur  $V$  dont la partie imaginaire est entière sur les couples d'éléments de  $L$ .*

Le théorème précédent appelle plusieurs *remarques*.

1. En dimension (complexe) 1, la condition du critère est toujours satisfaite. En effet, dans ce cas,  $L$  est engendré par deux nombres complexes non colinéaires  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  et la condition impose seulement que le produit scalaire de  $\lambda_1$  avec  $\lambda_2$  ait une partie imaginaire entière. Si un produit scalaire particulier n'a pas cette propriété, un multiple convenable l'aura. *Donc tout tore complexe de dimension 1 est une variété abélienne.*

2. On peut exprimer la condition d'intégralité du critère par une condition de *rationalité*. Supposons en effet qu'il existe sur  $V$  un produit scalaire dont la partie imaginaire est *rationnelle* sur les couples d'éléments de  $L$ . Prenant une base  $(\lambda_i)$  de  $L$  et un dénominateur commun à l'ensemble fini de nombres

$$\text{Im}(\lambda_i|\lambda_j) = g_{ij}/d \in \mathbf{Q} \quad (g_{ij} \in \mathbf{Z}, d \in \mathbf{Z}),$$

le multiple  $d(v|w)$  du produit scalaire  $(v|w)$  aura la propriété d'intégralité requise.

3. La *suffisance* de la condition énoncée se vérifie par une construction analytique transcendante: à l'aide d'une série de Fourier convergente, on construit la fonction thêta de Riemann à partir de laquelle le plongement projectif résulte facilement. La *nécessité* de la condition exige une connaissance rudimentaire de la cohomologie des espaces projectifs. La méthode de Lefschetz se comprend facilement si on connaît l'interprétation par formes différentielles de cette cohomologie (de Rham, Hodge). La démonstration donnée ci-dessous du théorème de base fournira des renseignements plus précis, notamment en ce qui concerne la dimension  $m$  d'un plongement possible. Dans les deux parties de la démonstration, les séries de Fourier jouent un rôle crucial.

4. Construisons un réseau  $L$  de  $\mathbf{C}^2$  ne satisfaisant pas la condition du théorème de base (le tore complexe correspondant  $\mathbf{C}^2/L$  n'est donc pas une variété abélienne: n'admet pas de plongement projectif). Les quatre couples  $e_1 = (1, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1)$ ,  $e_3 = (ia, ib)$  et  $e_4 = (ic, id)$  forment une base réelle de  $\mathbf{C}^2$  dès que  $a, b, c, d$  sont réels et  $ad - bc \neq 0$ . Dans la  $\mathbf{C}$ -base  $(e_1, e_2)$ , une forme hermitienne  $H$  se représente par une matrice  $(h_{ij})$  hermitienne ( $h_{ii}$  réels,  $h_{21} = \bar{h}_{12}$ ). Si  $E = \text{Im}(H)$  est entière sur  $L \times L$ , on aura

$$E(e_1, e_2) = \text{Im}(h_{12}) = n \in \mathbf{Z},$$

puis

$$\begin{aligned} E(e_3, e_4) &= \text{Im}(\overline{ia, ib}) (h_{ij}) \begin{pmatrix} ic \\ id \end{pmatrix} \\ &= \text{Im}(a, b) (h_{ij}) \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \\ &= (a, b) \begin{pmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = (ad - bc)n \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Dès que les nombres  $a, b, c, d$  seront choisis de façon que

$$(*) \quad ad - bc \notin \mathbf{Q}$$

l'entier  $n$  devra être nul. Si (\*) est satisfait, la matrice  $(h_{ij})$  de  $H$  devra être réelle (symétrique). Exprimons encore l'intégralité des parties imaginaires sur les autres produits scalaires lorsque (\*) est satisfait. Prenons d'abord

$$E(e_1, e_3) = ah_{11} + bh_{12} = p \in \mathbf{Z},$$

$$E(e_1, e_4) = ch_{11} + dh_{12} = q \in \mathbf{Z}.$$

Éliminons  $h_{11}$ :

$$(ad - bc)h_{12} = aq - cp.$$

Similairement

$$E(e_2, e_3) = ah_{12} + bh_{22} = r \in \mathbf{Z},$$

$$E(e_2, e_4) = ch_{12} + ch_{22} = s \in \mathbf{Z},$$

puis éliminant  $h_{22}$

$$(ad - bc)h_{12} = dr - bs.$$

Par comparaison, on trouve donc

$$(**) \quad qa + sb - pc - rd = 0.$$

Les nombres réels  $a, b, c, d$  sont donc  $\mathbf{Q}$ -linéairement dépendants. Commencant par choisir  $a, b, c$  réels  $\mathbf{Q}$ -linéairement indépendants, on peut certainement trouver  $d$  réel, différent de  $bc/a$  et  $\mathbf{Q}$ -indépendant de  $a, b, c$ . Amplifiant tous ces nombres par un même facteur réel non nul au besoin, on pourra satisfaire (\*) tout en conservant des nombres  $\mathbf{Q}$ -indépendants. Le réseau correspondant  $L$  n'aura pas la propriété mentionnée dans le théorème de base. Par exemple, on pourrait prendre

$$a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{5}, d = \sqrt{7}.$$

## 2. PARTIE ANALYTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nous supposons ici que le tore complexe  $V/L$  (notations de la sec. 1) satisfait la condition donnée dans le théorème de base, donc qu'il existe une forme hermitienne  $H$  définie positive sur  $V$  de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de  $L$ , et démontrerons que ce tore admet un plongement projectif complexe. Le produit scalaire hilbertien est donc dénoté par  $H(u, v) = (u|v)$ . Nous conviendrons que ce produit scalaire est  $\mathbf{C}$ -linéaire en la seconde variable (sic)

$$v \mapsto H(u, v) \text{ } \mathbf{C}\text{-linéaire (pour tout } u \in V),$$

$$H(u, \alpha v) = \alpha H(u, v) \text{ (pour tous } u, v \in V \text{ et } \alpha \in \mathbf{C}).$$

Appelons  $B$  la partie réelle de  $H$  et  $E$  la partie imaginaire de  $H$  de sorte que

$$H(u, v) = B(u, v) + iE(u, v)$$

et

$$H(v, u) = \overline{H(u, v)} = B(u, v) - iE(u, v).$$