

**Zeitschrift:** L'Enseignement Mathématique  
**Band:** 28 (1982)  
**Heft:** 1-2: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

**Artikel:** INTRODUCTION AUX VARIÉTÉS ABÉLIENNES COMPLEXES  
**Kapitel:** 3. Commentaires concernant la partie analytique de la démonstration  
**Autor:** Robert, Alain  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-52234>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Substituant cette expression dans les relations trouvées pour  $\psi(a + \lambda)$  et prenant  $\lambda = \lambda_j \in L_2$  (correspondant aux éléments de la base duale de  $(e_i) \subset L_1$ ), on voit

$$\psi(a + \lambda_j) = \psi(a) + 2i\pi(z'' - z'_j) + 2i\pi m_j \quad (m_j = m_{\lambda_j}).$$

Mais la linéarité de  $\psi$  donne directement

$$\psi(a + \lambda_j) - \psi(a) = 2i\pi \sum v_l f_l(\lambda_j).$$

Par comparaison, on trouve donc

$$f_j(z'' - z' + \sum m_l e_l) = z'' - z'_j + m_j = \sum v_l f_l(\lambda_j) = \sum v_l f_j(\lambda_l).$$

Cette égalité de composantes fournit l'égalité vectorielle

$$z'' - z' = \sum v_l \lambda_l - \sum m_l e_l$$

avec

$$\lambda_l \in L_2, m_l e_l \in L_1$$

et la démonstration sera terminée dès qu'on aura remarqué que les  $v_l$  sont des entiers

$$(z'' - z' \in L_1 + L_2 = L \Rightarrow z'' = z' \in V/L).$$

Or on a vu en cours de route

$$\psi(a + \lambda) = \psi(a) + 2i\pi n_\lambda \quad (n_\lambda \in \mathbf{Z} \text{ lorsque } \lambda \in L)$$

et en substituant l'expression linéaire affine de  $\psi$

$$\psi(a) = 2i\pi \sum v_l a_l + v$$

on trouve sans peine  $v_l = n_l \in \mathbf{Z}$ .

q.e.d.

### 3. COMMENTAIRES CONCERNANT LA PARTIE ANALYTIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Pour démontrer le théorème de plongement, nous avons considéré les espaces vectoriels  $S_k$  formés des fonctions entières  $f$  sur  $V$  satisfaisant les équations fonctionnelles

$$f(z + \lambda) = e_\lambda(z)^k f(z) \quad (\lambda \in L).$$

Rappelons aussi que les facteurs exponentiels  $e_\lambda(z)$  sont déterminés par

$$\begin{cases} e_\lambda = 1 & \lambda \in L_1, \\ e_\lambda(z) = \exp -i\pi f_\lambda(\lambda + 2z) & \lambda \in L_2. \end{cases}$$

En particulier, l'espace  $S_0$  est formé de fonctions entières  $L$ -périodiques, donc constantes d'après le théorème de Liouville:  $S_0 = \mathbf{C}$ . On peut aussi observer que le produit d'une fonction de  $S_k$  par une fonction de  $S_l$  est une fonction de  $S_{k+l}$ , ce qui suggère de considérer l'anneau gradué

$$S = \bigoplus_{k \geq 0} S_k = \mathbf{C} \oplus S_1 \oplus S_2 \oplus \dots$$

des fonctions theta. Par exemple, la multiplication par la fonction theta de Riemann  $\theta \in S_1$  induit des applications injectives  $S_k \rightarrow S_{k+1}$ . Comme on a déjà vu que ces espaces  $S_k$  ont des dimensions finies, les  $\dim(S_k)$  forment une suite croissante. Plus précisément

**PROPOSITION.** *On a  $\dim(S_k) = Pf(E)^n k^n$  ( $E$  étant la forme alternée sur le réseau  $L$  de rang  $2n$  dans l'espace vectoriel  $V$  de dimension complexe  $n$ ).*

En particulier

$$\begin{aligned} Pf(E) &= \dim(S_1) \quad \text{et} \\ \dim(S_k) &= k^n \quad \text{si } E \text{ est unimodulaire.} \end{aligned}$$

*Démonstration.* Nous supposons à nouveau  $E$  unimodulaire sur  $L$  (le cas général s'en déduisant facilement). Nous avons vu que les coefficients de Fourier  $a_\lambda (\lambda \in L_2)$  d'une  $f \in S_k$  satisfont aux relations de récurrence

$$a_{\lambda+k\mu} = a_\lambda e^{i\pi f_\mu(2\lambda+k\mu)} \quad (\mu \in L_2).$$

Si  $\lambda_0$  est un élément fixé de  $L_2$ , la relation de récurrence précédente impose

$$a_\lambda = a_{\lambda_0} e^{i\pi f_\nu(2\lambda_0+k\nu)} \quad \text{si } \lambda = \lambda_0 + k\nu \in \lambda_0 + kL_2.$$

Prenons  $a_{\lambda_0} = 1$  et montrons que la suite de coefficients de Fourier

$$\begin{cases} a_\lambda = e^{i\pi f_\nu(2\lambda_0+k\nu)} & \text{pour } \lambda = \lambda_0 + k\nu \in \lambda_0 + kL_2 \\ a_\lambda = 0 & \text{pour } \lambda \notin \lambda_0 + kL_2 \end{cases}$$

définit bien une fonction  $f = \theta_{\lambda_0} \in S_k$  pour  $\lambda_0 \in L_2$ . Lorsque  $\lambda_0$  parcourt un système de représentants de  $L_2 \bmod kL_2$ , on obtient évidemment des éléments linéairement indépendants de  $S_k$  (les supports des suites de coefficients de Fourier  $\lambda \mapsto a_\lambda$  correspondants forment une partition de  $L_2$ , donc sont disjoints).

Ces éléments forment une base de  $S_k$  d'où

$$\begin{aligned} \dim(S_k) &= [L_2 : kL_2] = [\mathbf{Z}^n : k\mathbf{Z}^n] \\ &= \det(k \cdot id_n) = k^n. \end{aligned}$$

Pour justifier l'affirmation, il s'agit de montrer que la suite de coefficients de Fourier attachée à un choix de  $\lambda_0 \in L_2$  satisfait effectivement la relation de récurrence caractérisant les équations fonctionnelles valables dans  $S_k$ , puis que la série de Fourier correspondante converge bien vers une fonction entière. Le premier point se vérifie par calcul : prenons  $\lambda = \lambda_0 + kv \in \lambda_0 + kL_2$  et  $\mu \in L_2$

$$a_{\lambda+k\mu} = a_{\lambda_0+k(v+\mu)} = \exp\{i\pi f_{v+\mu}(2\lambda_0 + k(v+\mu))\}.$$

L'exposant vaut (au facteur  $i\pi$  près)

$$\begin{aligned} &f_v(2\lambda_0 + kv) + \underbrace{f_v(k\mu)}_{f_\mu(kv)} + f_\mu(2\lambda_0 + k(v+\mu)) \\ &= f_v(2\lambda_0 + kv) + f_\mu(2\lambda_0 + 2kv + k\mu) \\ &= f_v(2\lambda_0 + kv) + f_\mu(2\lambda + k\mu) \end{aligned}$$

d'où bien

$$a_{\lambda+k\mu} = a_\lambda e^{i\pi f_\mu(2\lambda+k\mu)}.$$

La décroissance rapide de ces coefficients

$$a_{\lambda_0+kv} = e^{2i\pi f_{\lambda_0}(v)} e^{i\pi k f_v(v)}$$

est aussi claire puisque le module du premier terme croît comme l'exponentielle d'une fonction linéaire de  $v$  et le deuxième décroît comme une gaussienne (en  $v \in L_2$ ). La convergence en  $z$ , uniforme sur tout compact de  $V$  est alors assurée et la somme de la série de Fourier holomorphe dans  $V$  entier. On peut dire plus simplement que l'on construit une fonction  $\theta_0$  en prenant  $\lambda_0 = 0$  (par une suite de coefficients de Fourier particulièrement simples  $a_\lambda, \lambda \in kL_2$ ) et que nous obtenons les autres éléments de base de  $S_k$  par une translation convenablement tordue de ces coefficients sur les autres classes mod  $kL_2$  de  $L_2$ . Il est alors clair que le même principe s'applique dans le cas non unimodulaire en prenant les classes de  $kL_2$  dans  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(L_1, \mathbf{Z})$  et on trouve la formule de dimension annoncée.

Les espaces  $S_k$  s'interprètent aussi comme espaces de sections holomorphes de fibrés (holomorphes de rang 1) sur  $V/L$ . Le système  $(e_\lambda)_{\lambda \in L}$  est un *cocycle* de  $L$  à valeurs dans l'espace des fonctions entières ne s'annulant pas sur  $V$ . On entend par là qu'on a des relations

$$e_{\lambda+\lambda'}(z) = e_\lambda(z+\lambda') e_{\lambda'}(z) \quad (\lambda, \lambda' \in L).$$

On obtient ces relations en écrivant les équations fonctionnelles satisfaites par

$$\theta(z + \lambda + \lambda') = \theta(z' + \lambda) = e_\lambda(z')\theta(z') \quad (z' = z + \lambda').$$

Le membre de gauche est par définition  $e_{\lambda + \lambda'}(z)\theta(z)$  et celui de droite  $e_\lambda(z')e_{\lambda'}(z)\theta(z)$ . Puisque  $\theta$  n'est pas identiquement nulle, on peut simplifier par cette fonction obtenant les relations de cocycle par prolongement analytique à partir de l'ouvert non vide où  $\theta \neq 0$ . Les systèmes  $(e_\lambda^k)_{\lambda \in L}$  sont naturellement aussi des cocycles de  $L$ . Montrons comment on définit un fibré holomorphe de rang 1 à partir d'un cocycle. Prenons par exemple le cocycle  $(e_\lambda)$ . Sur le fibré trivial  $V \times \mathbf{C} \rightarrow V$ , le groupe discret  $L$  agit (de façon équivariante) par

$$\lambda \cdot (z, t) = (z + \lambda, e_\lambda(z)t) \quad (\lambda \in L, z \in V, t \in \mathbf{C})$$

(l'action sur la base étant simplement donnée par les translations). L'espace des orbites

$$[z, t] = \text{orbite de } (z, t)$$

est un fibré sur  $V/L$ :

$$\begin{array}{ccc} V \times \mathbf{C} & \rightarrow & V \times_L \mathbf{C} \ni [z, t] = [z + \lambda, e_\lambda(z)t] \\ \downarrow & & \downarrow \\ V & \rightarrow & V/L \ni \dot{z} (= z + \lambda). \end{array}$$

Ses sections sont les applications de la forme  $z \mapsto [z, \theta(z)]$ . Par définition de la relation d'équivalence

$$[z, \theta(z)] = [z + \lambda, e_\lambda(z)\theta(z)]$$

et ce point s'exprime aussi par  $[z + \lambda, \theta(z + \lambda)]$  d'où les relations fonctionnelles satisfaites par  $\theta$ . La continuité (resp. l'holomorphie) d'une telle section s'exprime par la continuité (resp. l'holomorphie) de  $\theta$  sur  $V$ . A chaque cocycle de  $L$  à valeurs dans l'espace des fonctions entières ne s'annulant pas sur  $V$ , on associe ainsi un fibré inversible, i.e. un élément de  $H^1(V/L, \mathcal{O}^\times)$  (ce groupe abélien est en général noté additivement, mais lorsqu'on interprète ses éléments comme des fibrés inversibles, la loi de groupe est donnée par le produit tensoriel des fibrés : l'inverse d'un fibré s'identifiant au fibré dual). La construction précédente fournit un homomorphisme

$$H^1(L, \Gamma(V, \pi^*\mathcal{O}^\times)) \rightarrow H^1(V/L, \mathcal{O}^\times).$$

Ici,  $\mathcal{O}^\times$  représente le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur  $V/L$ ,  $\pi: V \rightarrow V/L$  est la projection canonique de sorte que l'image inverse  $\pi^*\mathcal{O}^\times$

est le faisceau des fonctions holomorphes ne s'annulant pas sur  $V$ , ayant pour sections globales les éléments de

$$\Gamma(V, \pi^* \mathcal{O}^\times) = H^0(V, \pi^* \mathcal{O}^\times) = \{f: V \rightarrow \mathbf{C}^\times \text{ entière}\}.$$

Plus généralement, Grothendieck définit des flèches

$$H^p(G, \Gamma(X, \pi^* \mathcal{F})) \rightarrow H^p(G \backslash X, \mathcal{F})$$

dans le cas d'un groupe discret  $G$  agissant (continument, librement et proprement) sur un espace topologique (pas trop mauvais)... (cf. Mumford [1] p. 22 qui se réfère à Grothendieck [1], spécialement p. 195).

Lorsqu'on interprète ainsi  $S_k$  comme espace de sections du fibré  $\mathcal{L}^k$  correspondant au cocycle  $(e_\lambda^k)_{\lambda \in L}$

$$S_k = \Gamma(V/L, \mathcal{L}^k) = H^0(V/L, \mathcal{L}^k),$$

la finitude de la dimension de  $S_k$  résulte d'un théorème de Kodaira. Le vanishing theorem de Kodaira donne d'ailleurs aussi

$$H^i(V/L, \mathcal{L}) = 0 \quad \text{pour } i > 0$$

( $\mathcal{L}$  est un fibré positif et la classe canonique  $K_{V/L}$  est nulle puisque  $V/L$  est parallélisable de sorte qu'il existe des formes différentielles invariantes par translation, de diviseur vide). Il en résulte que la caractéristique d'Euler-Poincaré holomorphe

$$\sum (-1)^i \dim H^i(V/L, \mathcal{L}) = \dim H^0(V/L, \mathcal{L})$$

se réduit à la dimension de  $S_1$ . Le théorème de Riemann-Roch permet de retrouver cette dimension à partir de la première classe de Chern de  $\mathcal{L}$ . Ces remarques ont pour but de montrer comment les principales étapes de la démonstration analytique s'insèrent dans un contexte général.

Passons à quelques commentaires concernant le cas  $n = 1$ ,  $L$  étant ainsi un réseau de la droite complexe  $\mathbf{C}$ . Le théorème de plongement à l'aide des fonctions  $\theta$  de  $S_3$  se réalise dans un espace projectif de dimension  $m = \dim(S_3) - 1 = 3^n - 1$  (la dimension de  $S_k$  est donnée par la proposition ci-dessus), donc de dimension 2 lorsque  $n = 1$ . On obtient ainsi les modèles de  $\mathbf{C}/L$  comme courbes projectives planes. Il est plus facile dans ce cas de travailler avec les fonctions de Weierstrass  $p$  et  $p'$ . Rappelons simplement que  $p$  est définie comme somme d'une série de fonctions méromorphes

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{0 \neq \lambda \in L} \left\{ \frac{1}{(z-\lambda)^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right\}.$$

Il est clair par construction que l'ensemble des pôles de  $p$  est  $L$ -invariant (en dimension  $n > 1$ , les diviseurs ont une dimension  $> 0$  et il n'est guère possible de sommer les translatées d'une fonction méromorphe sur  $V$  pour obtenir une fonction méromorphe sur  $V/L$ ). En particulier,  $p$  a un pôle double en chaque point du réseau  $L$ . Sa dérivée  $p'$  a un pôle triple en ces mêmes points. On peut voir que  $p$  est un quotient de deux fonctions theta de  $S_2$  et que  $p'$  est un quotient de deux fonctions de  $S_3$ . Une base de  $S_2$  a d'ailleurs deux éléments et fournit une application projective sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ , donc sur la sphère de Riemann. Cette application identifie les points  $z$  et  $-z$  et est un revêtement (les quatre points de  $\frac{1}{2}L/L$  étant ramifiés).

Toujours dans le cas  $n = 1$ , montrons comment la fonction theta de Riemann s'apparente aux fonctions theta de Jacobi. La série

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} \quad (q \in \mathbf{C})$$

converge pour  $|q| < 1$ . Son carré est

$$\sum q^{n^2+m^2} = \sum_{N \geq 0} c_N q^N$$

où  $c_N$  dénote le nombre de couples  $(n, m) \in \mathbf{Z}^2$  avec  $n^2 + m^2 = N$ . De même, la puissance quatrième de  $\sum q^{n^2}$  est la fonction génératrice du nombre de représentations d'un entier positif comme somme de quatre carrés parfaits. Pour calculer ces fonctions, Jacobi a posé  $q = e^{i\pi\tau}$  ( $\text{Im } \tau > 0 \Rightarrow |q| < 1$ )

$$\theta(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau}.$$

Plus généralement, il étudie les fonctions

$$\theta_3(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\pi n^2 \tau} e^{2i\pi n z}$$

dont la précédente est la valeur en  $z = 0$  (theta nullwert). La série de Fourier de Riemann est donc exactement de ce type :  $L = \mathbf{Z} \oplus \tau\mathbf{Z}$ ,  $L_1 = \mathbf{Z}$ ,  $L_2 = \tau\mathbf{Z}$ .

#### 4. PARTIE COHOMOLOGIQUE DE LA DÉMONSTRATION

Nous allons démontrer ici que si le tore complexe  $V/L$  est une *variété abélienne*, il existe un produit scalaire hilbertien sur  $V$  de partie imaginaire entière sur les couples d'éléments de  $L$ . L'idée de la démonstration est simple. Partant d'un plongement projectif

$$i: V/L \rightarrow \mathbf{P}^m,$$