Chapitre II. Le théorème de Hardy-Littlewood

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **28 (1982)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

où $S_p(t)$ est la série singulière locale de F en p, et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t)\, S_f(t)\,;$$

la fonction $S_{\mathbf{A}}(t)$ est appelée *la série singulière globale de la forme* F. Introduisons enfin une dernière condition:

(SS 5) *Il existe* $T > 0$ *telle que la fonction* $\phi_0 \in \mathbf{S}(\mathbf{R}^n)$ *soit égale à 1 sur le compact*

$$\{x \in \mathbf{R}^n \mid F(x) \leqslant T\}\,.$$

Il vient donc immédiatement:

PROPOSITION 1.19. *Sous les conditions (SS 1) à (SS 5), on a*

$$S_{\mathbf{A}}(t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

si $t \leqslant T$.

CHAPITRE II. LE THÉORÈME DE HARDY-LITTLEWOOD

Dans ce chapitre, on considère la *forme de Fermat*

(1) $$F(x) = x_1^d + \dots + x_n^d$$

où d est un entier pair; et on va étudier le comportement asymptotique de la suite

(2) $$N(t) = \# \{x \in \mathbf{Z}^n \mid F(x) = t\}\,,$$

lorsque $t \in \mathbf{N}$ tend vers l'infini. Le théorème de Hardy-Littlewood (cf. [4], P.N. II) s'énonce *ainsi*:

THÉORÈME 2.1. *Supposons* $d \geqslant 3$ *et* $n > 2^d$.
On a alors

$$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t)\left(1 + 0\,(t^{-\theta})\right)$$

lorsque t *tend vers l'infini, avec* $\theta > 0$.

Remarquons que pour établir le théorème 2.1., il suffit de démontrer que l'on a

(3) $$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t) + 0\,(t^{(n/d)-1-\theta})\,;$$

on a en effet

(4) $$S_{\mathbf{A}}(t) = S_0(t)\,S_f(t)\,;$$

mais le corollaire 1.16. et la proposition 1.17. impliquent que l'on a

(5) $$1 \ll S_f(t) \ll 1\,,$$

et

(6) $$S_0(t) = V_0(t)^{(n/d)-1}\,;$$

ceci montre que la relation (3) implique le théorème 2.1.

On pose maintenant

$$R = [t^{1/d}] + 1\,,$$

et $\| x \|_0 = \mathrm{Max}\,(|x_1|_0, \ldots, |x_n|_0)$ si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$. On constate que si $\| x \|_0 > R - 1$, alors $F(x) > t$.

Soit χ_R la fonction caractéristique de l'intervalle $|x|_0 < R$ de la droite réelle, et ψ une fonction C^∞ positive sur $\mathbf{R}$, telle que

$$\int_{\mathbf{R}} \psi(x)\,dx = 1\,,$$

et $\psi(x) = 0$ si $|x|_0 \geqslant 1/3$; on pose

(7) $$\varphi_0 = \chi_R * \psi\,,$$

de telle sorte que la fonction φ_0 est C^∞ sur $\mathbf{R}$, que le support de φ_0 est inclus dans l'intervalle $|x|_0 \leqslant R + (1/3)$, et que le support de la dérivée de φ_0 est inclus dans l'ensemble $R - (1/3) \leqslant |x|_0 \leqslant R + (1/3)$. La fonction φ_0 est donc constante et égale à $\varphi_0(0) = 1$ si $|x|_0 \leqslant R - (1/3)$, et nulle si $|x|_0 \geqslant R + (1/3)$.

Pour tout $p \in P$, on note φ_p la fonction caractéristique de $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{Q}_p$. Ceci dit, pour $x \in \mathbf{A}$, on pose

(8) $$\varphi(x) = \prod_{p \in P} \varphi_p(x)\,;$$

si $p \in \bar{P}$ et si $x = (x_1, \ldots, x_n)$, on pose, dans ce chapitre II,

(9) $$\phi_p(x) = \varphi_p(x_1) \ldots \varphi_p(x_n)$$

de telle sorte que l'on a, si $x \in \mathbf{A}^n$,

(10) $$\phi(x) = \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n).$$

Avec ces notations, on a

(11) $$N(t) = \# \{x \in \mathbf{Q}^n \mid \phi(x) = 1 \quad \text{et} \quad F(x) = t\},$$

puisque la condition $\phi(x) = 1$ est équivalente aux deux conditions $x \in \mathbf{Z}_p^n$ pour tout $p \in P$, et $\phi_0(x) = 1$; or si $F(x) = t$, on a $\phi_0(x) = 1$. Pour $\xi \in \mathbf{A}$, nous allons étudier la somme trigonométrique

(12) $$f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} \varphi(x) \chi(x^d \xi),$$

qui est une somme finie puisqu'elle porte au plus sur les $x \in \mathbf{Z}$ tels que $|x|_0 < R$. Il vient immédiatement

(13) $$f(\xi)^n = \sum_{x \in \mathbf{Q}^n} \phi(x) \chi(\xi F(x)).$$

La fonction $f(\xi)^n$ est l'analogue de la fonction de Gauss de F, en ce sens que dans la relation (13) on somme sur $\mathbf{Q}$ au lieu d'intégrer sur $\mathbf{A}$. En regroupant dans (13) les vecteurs x ayant même image par F, il vient

$$f(\xi)^n = \sum_{t \in \mathbf{Q}} \chi(\xi t) \sum_{F(x) = t} \phi(x);$$

puisque les relations $\phi(x) \neq 0$ et $x \in \mathbf{Q}^n$ impliquent $x \in \mathbf{Z}^n$ et $\phi_0(x) \neq 0$, puisque pour $x \in \mathbf{Z}^n$, on a

$$\phi_0(x) = 1 \quad \text{si} \quad \| x \|_0 \leqslant R - 1$$

et

$$\phi_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad \| x \|_0 \geqslant R,$$

et puisqu'enfin si $\| x \|_0 \geqslant R$, on a $F(x) > t$, il s'ensuit que

(14) $$\sum_{F(x) = t} \phi(x) = N(t)$$

si $t \in \mathbf{Z}$; et si $t \notin \mathbf{Z}$ tous les termes de cette somme sont nuls. On a donc

(15) $$f(\xi)^n = \sum_{t \in \mathbf{Z}} N(t) \chi(t\xi),$$

et en utilisant la formule d'inversion de Fourier, qui s'applique bien évidemment ici puisque la somme du second membre de (14) est finie, on parvient au résultat suivant:

PROPOSITION 2.2. *Si* $t \in \mathbf{N}$ *on a, avec les notations précédentes,*

$$N(t) = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi \, .$$

Posons maintenant, pour $\xi \in \mathbf{A}$,

$$g(\xi) = \int_{\mathbf{A}} \varphi(x) \chi(x^d \xi) \, dx \, . \tag{16}$$

PROPOSITION 2.3. *Si* $n > 2d$ *et* $d \geqslant 3$, *alors*

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi \, .$$

Démonstration. La définition (16) de g et les définitions (8) et (10) de φ et ϕ impliquent que l'on a

$$g(\xi)^n = G_{\mathbf{A}}(\phi, \xi) \tag{17}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{A}$; et ici les conditions (SS 1) à (SS 5) du chapitre I sont remplies ; le théorème 1.18. implique que l'on a

$$\int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi = \hat{G}_{\mathbf{A}}(\phi, -t) = S_{\mathbf{A}}(\phi, t)$$

et par la proposition 1.19, on a

$$S_{\mathbf{A}}(\phi, t') = S_{\mathbf{A}}(t')$$

pour $t' \leqslant t$, ce qui démontre la proposition 2.3.

Les propositions 2.2. et 2.3. montrent que la relation (3) se réécrit :

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi - \int_{\mathbf{A}} g(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi = 0 \, (t^{(n/d) - 1 - \theta}) \, . \tag{18}$$

Pour établir cette relation, nous allons utiliser une partie M de $\mathbf{A}$, *l'ensemble majeur*, tel que $f(\xi)^n$ et $g(\xi)^n$ soient négligeables hors de M et tel que la différence $f(\xi)^n - g(\xi)^n$ soit négligeable dans M. En fait, si $\delta > 0$, on pose

$$M = \{\xi \in \mathbf{A} \mid \ | \xi |_0 \leqslant R^{-d+\delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant R^{\delta}\} \tag{19}$$

où $Q(\xi)$ est défini par la relation (12) du chapitre I.

LEMME 2.4. *Soit* π *la projection de* $\mathbf{A}$ *sur* $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$. *Alors si* $0 < A < B$, *la restriction de* π *à l'ensemble*

$$\{\xi \in \mathbf{A} \mid |\xi|_0 \leqslant (2B)^{-1} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant A\}$$

est injective.

Démonstration. Si ξ et ξ' sont dans $\mathbf{A}$, on a les relations:

$$Q(\xi+\xi') \leqslant \operatorname{Max}\left(Q(\xi), Q(\xi')\right), \tag{20}$$

$$Q(-\xi) = Q(\xi). \tag{21}$$

Si ξ et ξ' sont dans l'ensemble décrit dans le lemme, on a donc

$$Q(\xi-\xi') \leqslant A \quad \text{et} \quad |\xi - \xi'|_0 \leqslant B^{-1}$$

d'où s'ensuit

$$|\xi - \xi'|_0 \, Q(\xi-\xi') \leqslant AB^{-1} < 1 .$$

Or si $\eta \in \mathbf{Q}^*$, on a

$$|\eta|_0 \, Q(\eta) \geqslant 1 ;$$

il s'ensuit que si $\xi - \xi' \in \mathbf{Q}$, alors $\xi = \xi'$.

On notera $\overline{M}$ l'image de l'ensemble majeur M (défini par la relation (19)) par l'application π; le lemme 2.4. montre que π est une bijection de M sur $\overline{M}$. On appelle $\overline{M}$ *l'arc majeur* de $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$, et on pose

$$\overline{m} = (\mathbf{A}/\mathbf{Q}) - \overline{M} ; \tag{22}$$

l'ensemble $\overline{m}$ est *l'arc mineur*. Le résultat le plus délicat dans la démonstration du théorème de Hardy-Littlewood est l'évaluation de $f(\xi)^n$ sur $\overline{m}$. On va établir le résultat suivant:

THÉORÈME 2.5. *Supposons* $n > 2D$ *et* $\delta < 1$. *On a alors*

$$\int_{\overline{m}} |f(\xi)|^n \, d\xi \ll R^{n-d-\theta_1} ,$$

avec $\theta_1 > 0$.

La démonstration du théorème 2.5. repose sur des résultats d'approximation diophantienne. Le premier est simple:

LEMME 2.6. *Quel que soit* $N > 0$, *la restriction de* π *à l'ensemble*

$$D(N) = \{\xi \in \mathbf{A} \mid |\xi|_0 \, Q(\xi) < N^{-1} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant N\} \tag{23}$$

est surjective.

En effet, soit $\xi \in \mathbf{A}$; il existe un $x_0 \in \mathbf{Q}$ tel que $\xi_1 = x_0 - \xi \in \mathbf{Z}_p$ pour tout p, i.e. $Q(\xi_1) \leqslant 1$. Par ailleurs, le théorème d'approximation de Dirichlet implique qu'il existe $x_1 \in \mathbf{Q}$ tel que

$$|\xi_1 - x_1|_0 \leqslant Q(x_1)^{-1} N^{-1} \quad \text{et} \quad Q(x_1) \leqslant N .$$

Posons $\xi_2 = \xi_1 - x_1$; on a $Q(\xi_2) \leqslant \operatorname{Max}(Q(\xi_1), Q(x_1)) \leqslant \operatorname{Max}(1, N) \leqslant N$ et il s'ensuit donc que $\xi_2 \in D(N)$.

Le deuxième résultat est plus subtil : c'est *l'inégalité de Weyl :*

LEMME 2.7. *Soit* K *un polynôme à coefficients réels, de degré* d *et de coefficient du terme de plus haut degré égal à* α *:*

$$K(x) = \alpha x^d + \alpha_1 x^{d-1} + \ldots,$$

et supposons que le nombre α *admette une approximation par un nombre rationnel* a/Q *tel que*

$$(a, Q) = 1, \; Q \geqslant 1, \; \left|\alpha - \frac{a}{Q}\right| \leqslant \frac{1}{Q^2}.$$

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, *on a*

$$\left|\sum_{|x|_0 \leqq R} \exp(2i\pi K(x))\right| \leqslant C\, R^{1+\varepsilon} \left(R^{-(1D)} + Q^{-(1/D)} + (R^d/Q)^{-(1/D)}\right), \tag{24}$$

avec $D = 2^{d-1}$ *et où* C *ne dépend que de* d *et* ε.

Pour une démonstration de ce résultat, nous renvoyons le lecteur à [1], lemma 1. Si $\xi = (\xi_p) \in \mathbf{A}$, posons

$$\{\xi\} = -\xi_0 + \sum_{p \in P} < \xi_p > ,$$

où le nombre rationnel $< \xi_p >$ est défini par la relation (2) du Chapitre I. On a

$$\sum_{p \in P} < \xi_p > = \frac{a(\xi)}{Q(\xi)}, \tag{25}$$

où l'entier $Q(\xi)$ est défini comme d'habitude par la relation (12) du Chapitre I, et où les entiers $a(\xi)$ et $Q(\xi)$ sont premiers entre eux. De plus

$$f(\xi) = \sum_{|x| < R} \chi(x^d \xi) = \sum_{|x| < R} \exp(2i\pi x^d \{\xi\}). \tag{26}$$

Supposons maintenant que l'image $\pi(\xi)$ de ξ dans $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ soit dans $\overline{m}$; puisque la fonction f est invariante sous $\mathbf{Q}$, le lemme 2.6. permet de supposer que l'on a

$$(27) \qquad |\xi|_0 \, Q(\xi) < R^{-d+\delta} \quad \text{et} \quad Q(\xi) \leqslant R^{d-\delta}.$$

Mais la relation (25) implique

$$\left| \{\xi\} - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \right| = |\xi|_0 ;$$

on déduit donc des deux relations précédentes que

$$\left| \{\xi\} - \frac{a(\xi)}{Q(\xi)} \right| \leqslant \frac{1}{Q(\xi) R^{d-\delta}} \leqslant \frac{1}{Q(\xi)^2},$$

et on peut appliquer le lemme 2.7. de Weyl avec $K(x) = x^d \{\xi\}$; le membre de gauche de la relation (24) n'est autre que l'expression (26) de $f(\xi)$; si nous examinons le membre de droite de la relation (24) avec les valeurs qui lui sont données maintenant, on voit que

$$R^d / Q(\xi) \gg R^\delta$$

par la relation (27); et on a aussi

$$Q(\xi) > R^\delta ;$$

en effet la relation (27) implique que $|\xi|_0 < R^{-d+\delta}$; si on avait en outre $Q(\xi) \leqslant R^\delta$ alors $\pi(\xi)$ serait dans $\overline{M}$ ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc finalement, si $\delta < 1$,

$$(27.1) \qquad f(\xi) \ll R^{1+\varepsilon-(\delta/D)}.$$

Le troisième résultat que nous allons utiliser est l'*inégalité de Hua:*

LEMME. *Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a*

$$(27.2) \qquad \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} \, d\xi \ll R^{2D-d+\varepsilon}.$$

Démonstration. Soit $\hat{Z}$ l'ensemble produit de tous les $\mathbf{Z}_p$, pour $p \in P$. L'ensemble

$$D^+ =]0, 1[\times \hat{\mathbf{Z}}$$

est un domaine fondamental de $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{A}$, autrement dit la restriction de la projection π à D^+ est injective et pour toute fonction g continue sur $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$, on a

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} g(\xi) \, d\xi = \int_0^1 \int_{\hat{\mathbf{Z}}} g(\xi_0, \xi_f) \, d\xi_0 \, d\xi_f .$$

Si $\xi \in D^+$, et si $x \in \mathbf{Z}$, on a

$$\chi(x^d \xi) = \chi_0(x^d \xi_0),$$

ce qui implique

$$f(\xi) = f_0(\xi_0),$$

où on a posé, pour $\xi_0 \in \mathbf{R}$,

$$f_0(\xi_0) = \sum_{|x| \leqslant R} \chi_0(x^d \xi_0).$$

On a donc

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} d\xi = \int_0^1 |f_0(\xi_0)|^{2D} d\xi_0,$$

et pour prouver (27.2) il suffit de montrer que l'intégrale du membre de droite de la relation précédente est majorée par $R^{2D-d+\varepsilon}$, ce qui est l'inégalité de Hua comme énoncée et démontrée dans [1], lemma 2.

Pour démontrer le théorème 2.5., il suffit de remarquer que

$$\int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^n d\xi \leqslant \sup_{\xi \in \mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{n-2D} \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} |f(\xi)|^{2D} d\xi;$$

en utilisant (27.1) et (27.2), on voit que le membre de droite de cette expression est majoré par R^T, avec

$$T = (n-2D)\left(1 + \varepsilon - (\delta/D)\right) + 2D - d + \varepsilon;$$

on a donc

$$T = n - d - \theta_1,$$

avec

$$\theta_1 = (\delta/D)(n-2D) - \varepsilon(n-2D-1),$$

donc θ_1 est positif dès que $n > 2D$, ce qui établit le théorème 2.5.

Posons maintenant $g(\xi)^n = G(\xi)$, conformément à la relation (17).

THÉORÈME 2.8. *Lorsque* t *tend vers l'infini et si* $n > 2d$, *on a*

$$\int_{\mathbf{A}-M} |G(\xi)| d\xi \ll R^{n-d-\theta_2},$$

avec $\theta_2 > 0$.

Démonstration. Si $\xi \in \mathbf{A} - M$, on a

$$|\xi_0| > R^{-d+\delta} \quad \text{ou} \quad Q(\xi) > R^\delta;$$

On a donc

$$\int_{\mathbf{A}-M} G(\xi)\, d\xi \leqslant I_0(R)\, J_f + I_f(R)\, J_0(R)\,, \tag{28}$$

avec

$$\begin{aligned} I_0(R) &= \int_{|\xi_0| > R^{-d+\delta}} |\, G_0(\xi_0)\, |\, d\xi_0\,, \\ J_f &= \int_{\mathbf{A}_f} |\, G_f(\xi_f)\, |\, d\xi_f\,, \\ I_f(R) &= \int_{Q(\xi) > R^{\delta}} |\, G(\xi_f)\, |\, d\xi_f\,, \end{aligned}$$

et

$$J_0(R) = \int_{\mathbf{R}} |\, G_0(\xi_0)\, |\, d\xi_0\,.$$

Rappelons que la fonction G_0 dépend de R puisqu'elle dépend de ϕ_0 ; les relations (7) et (9) montrent que $\phi_0(\xi_0) \leqslant 1$, et que l'on a

$$\phi_0(0) \ll R^n\,.$$

La proposition 1.10. montre que l'on a

$$|\, G_0(\xi_0)\, | \ll \operatorname{Max}(R^{-d}, |\, \xi\, |)^{-(n/d)} \tag{29}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{R} |\, G_0(\xi_0)\, |\, d\xi_0 &\ll \int_{|\xi| < R^{-d}} R^n\, d\xi + \int_{|\xi| > R^{-d}} |\, \xi\, |^{-(n/d)}\, d\xi \\ &\ll R^{n-d} + (R^{-d})^{1-(n/d)} \\ &\ll R^{n-d}\,. \end{aligned}$$

D'autre part, la proposition 1.8. implique l'inégalité

$$I_f(R) \ll \int_{Q(\xi) > R} Q(\xi)^{-(n/d)}\, d\xi_f\,;$$

si nous écrivons $n/d = c + \varepsilon$ avec $c > 2$ et $\varepsilon > 0$, il vient

$$I_f(R) \ll R^{-\varepsilon\delta} \int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-c}\, d\xi_f$$

et la relation (13) du chapitre I montre que l'intégrale figurant dans le membre de droite converge; on a donc

(30) $$I_f(R)\, J_0(R) \ll R^{n-d-\varepsilon\delta}.$$

D'autre part, et en faisant usage de la relation (29), il vient

$$I_0(R) \ll \int_{|\xi|_0 > R-d+\delta} |\xi|_0^{-(n/d)}\, d\xi\,,$$

et donc

(31) $$I_0(R) \ll R^{(d-\delta)((n/d-1)} = R^{n-d-\varepsilon'}$$

avec $\varepsilon' > 0$; et puisque, toujours par la proposition 1.8., l'intégrale J_f est convergente, les relations (28), (30) et (31) établissent l'estimation énoncée dans le théorème 2.8.

THÉORÈME 2.9. *Pour tout* $\xi \in M$, *on a*

$$f(\xi) - g(\xi) \ll Q(\xi)\, R^{\delta}.$$

Démonstration. Posons

$$h(x, \xi) = \varphi(x)\, \chi(x^d \xi)\,,$$

où φ est définie par la relation (8), de telle sorte que

$$f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} h(x, \xi)$$

et

$$g(\xi) = \int_{\mathbf{A}} h(x, \xi)\, dx\,.$$

Posons aussi

$$\hat{h}(y, \xi) = \int_{\mathbf{A}} h(x, \xi)\, \chi(xy)\; dx\,.$$

Alors on peut appliquer à la fonction $h_\xi(x) = h(x, \xi)$ la formule de Poisson, et il vient

$$f(\xi) = \sum_{x \in \mathbf{Q}} h(x, \xi)$$
$$= \sum_{y \in \mathbf{Q}} \hat{h}(y, \xi)\,,$$

et donc

$$f(\xi) = g(\xi) + \sum_{y \neq 0} \hat{h}(y, \xi). \tag{32}$$

Si $\xi \in \mathbf{A}$ posons $q_p(\xi) = \operatorname{Max}(1, |\xi_p|_p)$.

Les fonctions h et $\hat{h}$ sont décomposables; nous noterons h_p (resp $\hat{h}_p$) leurs facteurs locaux.

LEMME 2.10. *La fonction* $y \to \hat{h}_p(y, \xi)$, *définie sur* $\mathbf{Q}_p$, *est constante modulo* $\mathbf{Z}_p$ *et à support dans* $q_p(\xi)^{-1} \mathbf{Z}_p$.

Démonstration. Posons $q_p(\xi) = q$. Puisque $q \geqslant 1$, si $| x_1 - x_2 | \leqslant q^{-1}$, alors x_1 et x_2 sont tous deux dans $\mathbf{Z}_p$ ou tous deux en dehors, et on a

$$\varphi_p(x_1) = \varphi_p(x_2).$$

Si x_1 et x_2 ne sont pas dans $\mathbf{Z}_p$, on a

$$g_p(x_1, \xi) = g_p(x_2, \xi) = 0.$$

Si x_1 et x_2 sont dans $\mathbf{Z}_p$, on a

$$| x_1^d - x_2^d |_p \leqslant | x_1 - x_2 |_p,$$

et donc

$$| x_1^d \xi - x_2^d \xi |_p \leqslant | x_1 - x_2 |_p | \xi |_p;$$

si

$$|x_1 - x_2| \leqslant q^{-1},$$

on a donc

$$| x_1^d \xi - x_2^d \xi |_p \leqslant 1,$$

et il s'ensuit que $\chi_p(x_1^d \xi) = \chi_p(x_2^d \xi)$ et par conséquent $h_p(x_1, \xi) = h_p(x_2, \xi)$. La fonction $x \to h_p(x, \xi)$ est donc constante modulo $q\, \mathbf{Z}_p$ et à support dans $\mathbf{Z}_p$; le lemme s'ensuit immédiatement par dualité.

LEMME 2.11. *Si* $u \in S(R)$, *on pose*

$$\| u \|_1^2 = \int_0^1 | \sum_{x \in \mathbf{Z}} u(x+t) |^2 \, dt. \tag{33}$$

Alors

$$\sum_{y \neq 0} | \hat{u}(y) | \leqslant (1/2\sqrt{3}) \| u' \|_1. \tag{34}$$

Démonstration. En appliquant l'égalité de Parseval-Bessel à la fonction périodique

$$u^* (t) = \sum_{x \in \mathbf{Z}} u(x+t),$$

on obtient

$$\sum_{y \in \mathbf{Z}} | \hat{u}(y) |^2 = \int_0^1 | u^* (t) |^2 \, dt = \| u \|_1^2 ,$$

et en remplaçant u par sa dérivée u', il vient

$$4\pi^2 \sum_{y \neq 0} | y\hat{u}(y) |^2 = \| u' \|_1^2 .$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux suites $| y\hat{u}(y) |$ et $| 1/y |$, où y parcourt $\mathbf{Z} - \{0\}$, on en déduit

$$[\sum_{y \neq 0} | \hat{u}(y) |]^2 \leqslant (\pi^2/3)(1/4\pi^2) \| u' \|_1^2 ,$$

d'où le lemme 2.11.

LEMME 2.12. *Avec les notations précédentes, si* $0 < a < R$ *et* $\xi_0 \in \mathbf{R}$ *on a*

$$\sum_{y \neq 0} \hat{h}_0 (y/a, \xi_0) \ll aR^d | \xi_0 | .$$

Démonstration. Nous allons tout d'abord établir le résultat suivant. Soit $u \in C_c(\mathbf{R})$; on suppose que $\operatorname{Supp} u \subset [-R, +R]$ et on pose $M(u') = \sup_{\mathbf{R}} | u'(x) |$. Alors

(35) $$(1/a) \sum_{y \neq 0} | \hat{u}(y/a) | \leqslant (1/\sqrt{3}) \, R \, M(u') .$$

En effet appliquons le lemme 2.11 à la fonction $v(t) = u(at)$; puisque $\hat{v}(y) = (1/a) \, \hat{u}(y/a)$ on a

$$(1/a) \sum_{y \neq 0} | \hat{u}(y/a) | \leqslant (1/2\sqrt{3}) \| v' \|_1 .$$

Mais puisque $u(x) = 0$ si $| x | > R$, la fonction $v'(x+t) = au'(ax+at)$ est nulle si $| x | > (R/a) + 1$, donc a fortiori si $| x | > 2R/a$ et

$$\sum | v'(x+t) | \leqslant \sum_{|x| \leqslant 2R/a} aM(u') = 2RM(u') ,$$

d'où $\| v' \|_1 \leqslant 2RM(u')$ et la relation (35).

Ceci dit, on a

$$(d/dx) \, h(x, \xi_0) = \chi_0 (x^d \xi_0) \left(\varphi_0' (x) + 2i\pi d x^{d-1} \xi_0 \, \varphi_0 (x) \right);$$

or on peut choisir ψ de telle sorte que $0 \leqslant \psi(x) \leqslant 1$, et alors

$$\varphi_0(x) = \psi * \chi_R(x)$$

vérifie aussi $0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant 1$; et puisque

$$\varphi_0'(x) = \psi(x+R) - \psi(x-R),$$

on a $|\varphi_0'(x)| \leqslant 2$. En tenant compte du fait que

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > R + (1/3),$$

il vient donc finalement

$$M\left((d/dx)\, h_0(x, \xi_0)\right) \leqslant C R^{d-1} |\xi|_0, \tag{36}$$

où la constante C ne dépend ni de R ni de ξ_0. En appliquant à $h_0(x, \xi_0)$ la relation (35) et compte tenu de (36), on obtient le résultat du lemme 2.12.

Démonstration du théorème 2.9. La relation (32) implique

$$|f(\xi) - g(\xi)| \leqslant \sum_{y \in \mathbf{Q}^*} |\hat{h}(y, \xi)|,$$

et le lemme 2.10 montre que la somme de droite ne porte en réalité que sur les $y \in \mathbf{Q}^*$ tels que $q_p(\xi)\, y \in \mathbf{Z}_p$ pour tout $p \in P$, donc tels que $Q(\xi)\, y \in \mathbf{Z}$; par ailleurs, puisque

$$\hat{h}_p(y, \xi_p) = \int_{\mathbf{Z}_p} \chi_p(x^d \xi + xy)\, dx, \tag{37}$$

on a $|\hat{h}_p(y, \xi_p)| \leqslant 1$ et donc

$$|\hat{h}(y, \xi)| \leqslant |\hat{h}_0(y, \xi_0)|;$$

il s'ensuit

$$|f(\xi) - g(\xi)| \leqslant \sum_{y \in \mathbf{Z} - \{0\}} \hat{h}_0(y/Q(\xi), \xi_0);$$

utilisant le lemme 2.12 pour majorer le membre de droite, il vient

$$f(\xi) - g(\xi) \ll R^d |\xi_0| Q(\xi),$$

et comme $|\xi_0| \leqslant R^{-d+\delta}$ si $\xi \in M$, le théorème 2.9 est démontré.

THÉORÈME 2.13. *Si* $\delta < d/(2d+1)$, *et si* $n \geqslant 4d$, *on a*

$$\int_M f(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi)\, d\xi + O(R^{n-d-\theta_3}),$$

avec $\theta_3 > 0$.

Démonstration. La proposition 1.6 montre que

$$g_f(\xi) \ll Q(\xi)^{-1/d};$$

par ailleurs

$$g_0(\xi_0) \ll R;$$

on a donc

$$g(\xi) \ll R\,Q(\xi)^{-1/d}. \tag{38}$$

Remarquons maintenant que si $\delta < d/(2d+1)$ et $\xi \in M$, on a

$$R^\delta Q(\xi) \leqslant R\,Q(\xi)^{-1/d}: \tag{39}$$

en effet la relation $Q(\xi) < R^\delta$ implique, puisque $\delta\bigl(1 + (1/d)\bigr) < 1 - \delta$,

$$Q(\xi)^{1+(1/d)} \leqslant R^{1-\delta}.$$

Posons

$$K(\xi) = f(\xi)^n - g(\xi)^n;$$

si $\xi \in M$ on a l'inégalité

$$K(\xi) \ll R^{n-1+\delta} Q(\xi)^{-\nu} \tag{40}$$

avec $\nu > 2$, comme on va le voir. Si on pose

$$k(\xi) = f(\xi) - g(\xi),$$

il vient, par la formule du binôme,

$$K(\xi) \ll \operatorname{Max}\bigl(|\,k(\xi)^p\,g(\xi)^{n-p}\,|\bigr) \qquad (1 \leqslant p \leqslant n),$$

mais le théorème 2.9. affirme que

$$k(\xi) \ll R^\delta Q(\xi);$$

les inégalités (38) et (39) montrent donc que l'on a

$$k(\xi)^p\,g(\xi)^{n-p} \ll R^{n-1+\delta} Q(\xi)^{1-((n-1)/d)};$$

or si $n \geqslant 3d + 2$, on a

$$1 - \bigl((n-1)/d\bigr) < -2,$$

ce qui établit (40) puisque $3d + 2 \leqslant 4d$ dès que $d \geqslant 2$.

Pour démontrer le théorème 2.13. il suffit donc d'estimer l'intégrale de K sur M ; mais la relation (40) et la définition de M impliquent

$$\int_M K(\xi)\,d\xi \ll \int_{|\xi_0| < R^{-d+\delta}} R^{n-1+\delta} \int_{Q(\xi) < R^\delta} Q(\xi)^{-\nu}\,d\xi_f\,;$$

puisque $\nu > 2$, l'intégrale

$$\int_{\mathbf{A}_f} Q(\xi)^{-\nu} \, d\xi_f$$

est convergente et on a donc

$$\int_M K(\xi) \, d\xi \ll R^{n-d+1-2\delta}$$

ce qui établit le théorème 2.13. avec $\theta_3 = 1 - 2\delta$.
Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.1. Rappelons que l'on a posé $D = 2^{d-1}$. Supposons donc $n > 2D$, et dans la définition (19) de l'ensemble majeur, choisissons δ tel que

$$\delta < d/(2d+1) \, .$$

D'autre part soit θ un nombre « suffisamment petit ». La proposition 2.2. affirme que

$$N(t) = \int_{\mathbf{A}/\mathbf{Q}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi \, ;$$

nous avons vu dans le théorème 2.5. que lorsque $n > 2D$, on a

$$\int_m |f(\xi)|^n \, d\xi \ll R^{n-d-\theta}$$

et dans le théorème 2.13., que si $n > 4d$,

$$\int_{\bar{M}} f(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi + 0(R^{n-d-\theta}) \, .$$

Les trois relations précédentes impliquent donc que l'on a

$$N(t) = \int_M g(\xi)^n \chi(-t\xi) \, d\xi + 0(R^{n-d-\theta}) \, .$$

Rappelons que $g(\xi)^n = G(\xi)$ et que si $n > 2d$, et $d \geqslant 3$, on a

$$\int_{\mathbf{A}-M} |G(\xi)| \, d\xi \ll R^{n-d-\theta}$$

par le théorème 2.8., et

$$S_{\mathbf{A}}(t) = \int_{\mathbf{A}} G(\xi) \chi(-t\xi) \, d\xi$$

par la proposition 2.3. Puisque $R^d \sim t$, on tire des trois relations précédentes que sous les hypothèses faites (et en changeant θ en θ/d), on a

$$N(t) = S_{\mathbf{A}}(t) + 0\,(t^{(n/d)-1-\theta})$$

qui n'est autre que la relation (3) et le théorème 2.1. est établi.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DAVENPORT, H. *Analytic methods for diophantine equations and approximations.* Campus Publishers, Ann Arbor, 1962.

[2] DELIGNE, P. La conjecture de Weil I. *Publ. Math. I.H.E.S. 43* (1974), 273-307.

[3] ELLISON, W. J. Waring's Problem. *Amer. Math. Monthly 78* (1971), 10-36.

[4] HARDY, G. H. and J. E. LITTLEWOOD. Some problems of "Partitio Numerorum", I, II, IV, VI. In the *Collected Works of G. H. Hardy, vol. 1*, 405-505, Oxford, Oxford University Press, 1966.

[5] IGUSA, J. I. On a certain Poisson Formula. *Nagoya Math. J. 53* (1974), 211-233.

[6] —— *Lectures on forms of higher Degree.* Tata Institute of Fundamental Research Lectures No. 59, Berlin, Springer 1978.

[7] ONO, T. Gauss Transforms and Zeta Functions. *Ann. of Math. 91* (1970), 332-361.

[8] SERRE, J. P. Majorations de Sommes exponentielles. *Journées Arithmétiques de Caen, Astérisque 41-42* (1977), 111-126

[9] WEIL, A. Sur la formule de Siegel dans la théorie des groupes classiques. *Acta Math. 113* (1965), 1-87; In: *Œuvres Scientifiques, vol. III*, Berlin, Springer 1979.

[10] MARS, J. G. M. Sur l'approximation du nombre de solutions de certaines équations diophantiennes. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. (4), 6* (1973), 357-388.

[11] LACHAUD, G. An adelic proof of the Hardy-Littlewood theorem on Waring's problem. *Journées Arithmétiques in Exeter*, London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, 1982.

[12] VAUGHAN, R. C. *The Hardy-Littlewood method.* Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1981.

(Reçu le 13 mars 1981, révisé le 5 mars 1982)

Gilles Lachaud

Université de Nice
7, Avenue Bieckert
F-06000 Nice