

## §4. EXTENDING FROM (0, 1) TO R/Z

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

*Proof of Theorem 1 for  $\operatorname{Re}(s) < 0$ .* Since  $f(x) - Ax^{s-1}$  tends to a finite limit as  $x \rightarrow 0$ , it follows that  $f(x) - A\zeta_{1-s}(x)$  also tends to a finite limit as  $x \rightarrow 0$ . Applying a similar argument to the function  $f(1-x)$ , we find a constant  $B$  so that  $f(x) - B\zeta_{1-s}(1-x)$  tends to a limit as  $x \rightarrow 1$ . Hence the difference

$$f(x) - A\zeta_{1-s}(x) - B\zeta_{1-s}(1-x)$$

extends to a continuous function on the closed unit interval. According to Lemma 4, this function must be constant. Since  $s \neq 0$ , it follows that it is identically zero. Thus

$$f(x) = A\zeta_{1-s}(x) + B\zeta_{1-s}(1-x);$$

where the two functions on the right are linearly independent since one is continuous and one is discontinuous as  $x \rightarrow 0$ .  $\square$

In fact the functions  $\zeta_{1-s}(x)$  and  $\zeta_{1-s}(1-x)$  are linearly independent for all  $s \neq 0, 1, 2, \dots$ , as one can check by repeated differentiation.

#### §4. EXTENDING FROM $(0, 1)$ TO $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$

We will prove the following. Let  $s$  be a complex constant.

LEMMA 7. *If a function  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbf{C}$  satisfies the Kubert identities  $(*_s)$  with  $s \neq 1$ , then it extends uniquely to a function  $\mathbf{R}/\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$  satisfying  $(*_s)$ .*

Here no mention is made of continuity. If  $\operatorname{Re}(s) > 1$  and if  $f$  happens to be continuous, then we have seen that the extension is also continuous. However, if  $\operatorname{Re}(s) \leq 1$  then the extension cannot be continuous, except in the trivial case of a constant function with  $s = 0$ .

*Proof.* We must choose  $f(0)$  so as to satisfy all of the equations

$$f(0) = m^{s-1}(f(0) + f(1/m) + \dots + f((m-1)/n)).$$

Setting

$$c_m = f(1/m) + \dots + f((m-1)/m),$$

we can write this as

$$(m^{1-s} - 1)f(0) = c_m.$$

But  $(*_s)$  implies that

$$c_n = m^{s-1}(c_{mn} - c_m)$$

hence

$$c_{mn} = m^{1-s}c_n + c_m = n^{1-s}c_m + c_n$$

and

$$(m^{1-s} - 1)c_n = (n^{1-s} - 1)c_m.$$

Since  $s \neq 1$ , these factors  $m^{1-s} - 1$  cannot all be zero. It now follows easily that  $f(0)$  exists and is unique.  $\square$

For the functions  $f(x)$  studied in §2, it is interesting to note that  $f(0)$  is always an appropriate value of the Riemann zeta function. Thus for the version  $f(x) = l_s(x)$  of the polylogarithm function, the appropriate choice is

$$f(0) = \zeta(s).$$

In fact, if  $\operatorname{Re}(s) > 1$ , then  $l_s(x)$  is continuous on  $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  with  $l_s(0) = \zeta(s)$ , so the required identity

$$(m^{1-s} - 1)\zeta(s) = l_s(1/m) + \dots + l_s((m-1)/m)$$

holds by continuity as  $x \rightarrow 0$ . It follows by analytic continuation that this formula is true for all  $s \neq 1$ . (Since the right side is holomorphic for all  $s$ , this identity provides an alternative proof that  $\zeta(s)$  extends to an holomorphic function for  $s \neq 1$ .)

Similarly, if  $f(x) = \zeta_{1-s}(x)$  for  $0 < x < 1$ , then by continuity as  $x \rightarrow 1$  the appropriate choice is

$$f(0) = \zeta(1-s).$$

Note that Lemma 7 is definitely false in the exceptional case  $s = 1$ . In the case of the even function

$$f(x) = \log |2 \sin \pi x| = \log |1 - e^{2\pi i x}|,$$

which satisfies  $(*_1)$  in the open unit interval, the identity

$$(10) \quad f(1/m) + f(2/m) + \dots + f((m-1)/m) = \log m \neq 0$$

shows that it is not possible to define  $f(0)$  so as to satisfy  $(*_1)$  at zero. This identity is proved by substituting  $t = 1$  in the equation

$$1 + t + \dots + t^{m-1} = \prod_1^{m-1} (t - \xi^k)$$

where  $\xi = e^{2\pi i/m}$ , and then taking the logarithm of the absolute value of both sides.

On the other hand, for the Bernoulli polynomial

$$f(x) = x - 1/2 \quad \text{for} \quad 0 < x < 1,$$

the value  $f(0)$  can be defined arbitrarily and  $(*_1)$  will always be satisfied.