

## 5. Decomposition of $\text{Hom}(V_m, V_{m+n})$

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$\mathcal{A}^0 \cap \mathcal{B}$  is spanned by the elements (4.2) such that  $b = c$ , all of which are of the form  $J^a E_+^b$ .  $\square$

We remark that the subalgebra of  $\mathcal{A}$  generated by  $\mathfrak{sl}_2$  is canonically isomorphic to the universal enveloping algebra of  $\mathfrak{sl}_2$ . The element  $J(J+2)$  equals  $H^2 + 2(E_+E_- + E_-E_+)$ , the Casimir element for  $\mathfrak{sl}_2$ . Thus  $\mathcal{A}^0$  is a little larger than the enveloping algebra of  $\mathfrak{sl}_2$ .

For integers  $l, n$  define  $\mathcal{B} \binom{n}{l}$  to be the set of  $T \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}^n$  such that  $\rho(H)T = lT$ .

This defines a grading of  $\mathcal{B}$ :

$$\mathcal{B} = \bigoplus \mathcal{B} \binom{n}{l}, \quad \mathcal{B} \binom{n}{l} \cdot \mathcal{B} \binom{n'}{l'} \subset \mathcal{B} \binom{n+n'}{l+l'}. \quad (4.8)$$

The generators of  $\mathcal{B}$  fit in as follows:

$$J \in \mathcal{B} \binom{0}{0}, \quad X \in \mathcal{B} \binom{1}{1}, \quad \partial_Y \in \mathcal{B} \binom{-1}{1}. \quad (4.9)$$

PROPOSITION 4.10. i)  $\mathcal{B} \binom{0}{0} = \mathbf{C}[J]$ .

ii)  $\mathcal{B} \binom{n}{l} \neq 0$  if and only if  $l \geq 0, |n| \leq l$ , and  $l \equiv n \pmod{2}$ . If these conditions are met, then

$$\mathcal{B} \binom{n}{l} = \mathbf{C}[J] \cdot X^{\frac{l+n}{2}} (\partial_Y)^{\frac{l-n}{2}} \quad (4.11)$$

*Proof:* Immediate.  $\square$

We note that the condition that  $\mathcal{B} \binom{n}{l} \neq (0)$  may be rephrased thus:  $l \geq 0$  and  $n$  is a weight of  $V_l$ .

## 5. DECOMPOSITION OF $\text{Hom}(V_m, V_{m+n})$

THEOREM 5.1. Let  $l, m, n$  be integers with  $l, m, m+n \geq 0$ . There is an  $\mathfrak{sl}_2$ -subrepresentation of  $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(V_m, V_{m+n})$  which is isomorphic to  $V_l$  if and only if  $|n| \leq l, n \equiv l \pmod{2}$ , and  $m \geq \frac{l-n}{2}$ .

Moreover, when these conditions are met there is a unique such subrepresentation. A weight vector of weight  $l$  in it is given by

$$X^{\frac{l+n}{2}} (\partial_Y)^{\frac{l-n}{2}}.$$

*Proof:* By Lemma 2.7 and the definition of  $\mathcal{B} \binom{n}{l}$ , a weight vector of weight  $l$  of the subrepresentation sought must be the restriction to  $V_m$  of an element of  $\mathcal{B} \binom{n}{l}$ . By Lemma 4.10ii, all such restrictions are scalar multiples of the restriction of  $X^{\frac{l+n}{2}} (\partial_Y)^{\frac{l-n}{2}}$  to  $V_m$ , which restriction is nonzero only when  $m \geq \frac{l-n}{2}$ . □

It is interesting to observe that the weight  $l$  weight vector in  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_m, V_{m+n})$  given by Theorem 5.1 is "independent" of  $m$ .

Finally we want to give formulas for the weight vectors in  $\text{Hom}(V_m, V_{m+n})$  of all weights, not just of highest weight.

For integers  $l, i, j$  with  $l \geq 0$  and  $0 \leq i, j \leq l$ , define an element  $A_l(i, j)$  of  $\mathcal{A}$ :

$$A_l(i, j) = \sum_{\alpha \leq k \leq \beta} (-1)^k \binom{l}{i} \binom{i}{k} \binom{l-i}{j-k} X^{l-i-j+k} Y^{j-k} (\partial_X)^k (\partial_Y)^{i-k}$$

with  $\alpha = \sup\{0, i+j-l\}$  and  $\beta = \inf\{i, j\}$ . (5.2)

LEMMA 5.3.  $\rho(E_-)^j \binom{l}{i} X^{l-i} (\partial_Y)^i = j! A_l(i, j).$

*Proof:* By induction on  $j$ . Use the formula:

$$[E_-, D(i, j, a, b)] = iD(i-1, j+1, a, b) - bD(i, j, a+1, b-1)$$

with  $D$  as in (2.1). □

THEOREM 5.4. Let  $l, m, n$  be such that there is a subrepresentation of  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_m, V_{m+n})$  isomorphic to  $V_l$ . Then an inclusion of representations  $\phi: V_l \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(V_m, V_{m+n})$  may be given by the formula:

$$\phi(X^{l-j} Y^j) = \frac{1}{\binom{l}{j}} A_l \left( \frac{l-n}{2}, j \right). \tag{5.5}$$

*Proof:* This depends on (5.3) and the calculation in  $V_l$  that

$$E_{-j}X^l = \frac{l!}{(l-j)!} X^{l-j}Y^j. \quad \square$$

#### REFERENCES

- [1] L. C. BIEDENHARN and J. D. LOUCK. *Angular Momentum in Quantum Physics*. Addison-Wesley (Reading, Massachusetts), 1981.
- [2] D. FLATH and L. C. BIEDENHARN. *Beyond the Enveloping Algebra of  $sl_3$* . *Preprint*.
- [3] A. A. KIRILLOV. *Elements of the Theory of Representations*. Springer-Verlag (Berlin), 1976.

(Reçu le 9 mai 1983)

Daniel Flath

Department of Mathematics  
Duke University  
Durham, North Carolina 27706  
USA