

## 4. A SMALL TREE WITH MANY FRUITS

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## 3. A TOURIST COLONY NOT TO BE RECOMMENDED

In 1927 Nikodym, in order to explore the geometric structure of the measurable sets in the plane, showed how to construct, inside a square  $Q$ , a set  $N$  that fills it (i.e. the measure of  $Q-N$  is zero) and so that for each point  $x$  of  $N$  there is a straight line  $l(x)$  passing through it and not hitting any other point of  $N$  (Fig. 4).

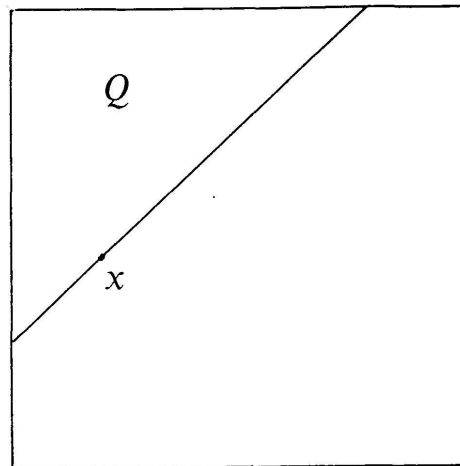


FIGURE 4

The architects of tourist colonies have not yet learned about this magnificent business possibility, but the day somebody tells you about the marvels of a colony in an island which offers a free view over the ocean from each one of its apartments, beware!

Although it seems incredible one can still make it better. R. O. Davies in 1953 constructed a set  $N$  in  $Q$  filling  $Q$  and such that each  $x$  of  $N$  has infinitely many directions in which one can see the ocean... inside any arbitrarily small angle one may fix!

## 4. A SMALL TREE WITH MANY FRUITS

In 1928 Besicovitch was informed about the needle problem and published its solution. In 1929 Perron simplified the somewhat laborious construction of Besicovitch. It has been further simplified later on. The final product of the line of

thought, that we shall call *the Perron tree*, has proved to be an extraordinarily fruitful tool for the solution of certain deep problems of recent mathematical analysis.

The result is as follows: Given an arbitrary  $\varepsilon > 0$  and an arbitrary triangle  $ABC$  of area that we denote by  $S(ABC)$ , we can divide the triangle  $ABC$  into small triangles  $T_1, T_2, \dots, T_n$  as Figure 5 shows (i.e. dividing the basis  $a$  into a finite number of equal intervals  $I_1, I_2, \dots, I_n$ ) and one can translate appropriately the small triangles  $T_1, T_2, \dots, T_n$  parallelly to the basis  $a$  in such a way that the area of the union of the translated triangles is less than  $\varepsilon S(ABC)$ . (See Fig. 6.)

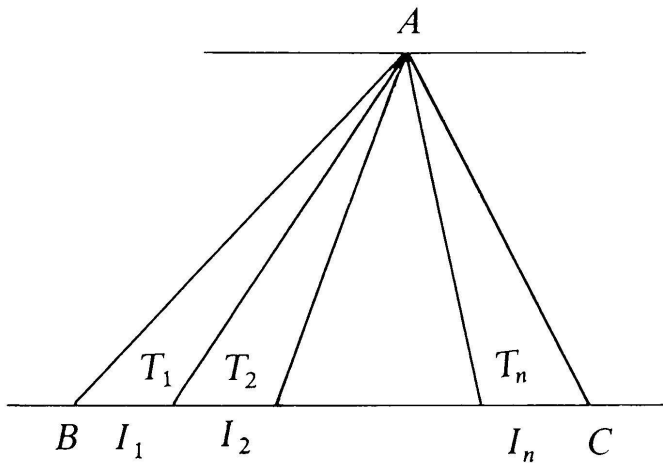


FIGURE 5

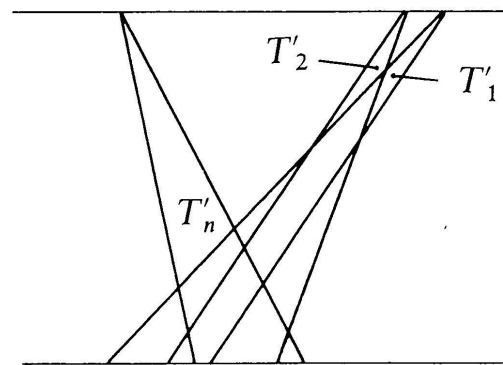


FIGURE 6

## 5. HOW THE PERRON TREE SPROUTS

Following an idea of Rademacher (1962), the construction of the Perron tree can be easily understood as follows. Let us divide first a triangle  $T, MNP$ , of area  $S(T)$ , into two triangles  $T_1, T_2$ , with bases  $J_1, J_2$ , of the same length. If we wish to move  $T_1$  and  $T_2$ , parallelly to  $NP$  so that the shifted triangles cover less area we can do it by pushing  $T_2$  towards  $T_1$  as Figure 7 shows. The area covered by  $T_1$  and  $T'_2$  can be easily measured by elementary geometry and is (see Fig. 7, we take  $1/2 < \alpha < 1$ )

$$\alpha^2 S(T) + 2(1 - \alpha)^2 S(T)$$