GROUPE DE WITT D'UNE ALGÈBRE AVEC INVOLUTION

Autor(en): **Cibils, Claude**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-52971

L'Enseignement Mathématique, t. 29 (1983), p. 27-43

GROUPE DE WITT D'UNE ALGÈBRE AVEC INVOLUTION

par Claude CIBILS

Cet article se propose d'expliciter le groupe de Witt d'une algèbre A munie d'une involution et de dimension finie sur un corps k de caractéristique quelconque. La définition précise de ce groupe est donnée au § 1, il est formé des classes d'équivalence de A-modules munis d'une forme bilinéaire symétrique, stable sous l'involution, non dégénérée, à valeurs dans k, modulo les formes neutres.

Dans le cas d'une algèbre d'un groupe fini G sur k, munie de l'involution $\bar{g} = g^{-1}$ si $g \in G$, l'objet de notre étude sont les formes symétriques, non dégénérées sur des k espaces vectoriels, sur lesquels G agit par isométries.

Au § 1 nous montrons que le groupe de Witt de A s'identifie à celui de $A/\text{rad } A$. Cela repose sur l'existence et l'unicité d'un module anisotrope par classe d'équivalence dans le groupe de Witt, qui est un résultat bien connu dans ce contexte. (LEVINE, J., Invariants of knot cobordism, *Inventiones Math. 8*, 1969, 98).

Au § 2 il est montré d'abord comment le groupe de Witt d'une algèbre semisimple est somme directe des groupes de Witt de ses composantes simples préservées par l'involution. Ensuite l'on s'attache à fabriquer une involution sur le corps gauche associé à une algèbre simple à involution. Pour finir nous décrivons un isomorphisme entre le groupe de Witt hermitien de ce corps gauche et le groupe de Witt de l'algèbre simple.

Une présentation par générateurs et relations du groupe de Witt des formes symétriques sur un corps (commutatif) est obtenue dans le livre J. MILNOR, D. HUSEMOLLER, *Symmetric bilinear forms*, (1973), Springer Verlag. En effectuant quelques légères modifications, la même présentation est encore valable pour le groupe de Witt hermitien d'un corps gauche, c'est à quoi le § 3 est consacré.

Aux §§ 1 et 2 quelques résultats élémentaires sur les algèbres de dimension finie et leurs représentations sont admis sans démonstration. On peut se reporter aux livres C. CURTIS, I. REINER; *Representation theory of finite groups and algebras*, Interscience Publishers, New York (1962) et *Methods of representation theory*, Wiley Interscience, New York (1981).

Je tiens à remercier Michel Kervaire pour son aide et ses suggestions, ainsi que Philippe Steiner pour d'utiles conversations.

§ 1. Réduction au cas semisimple

Soit A une k algèbre de dimension finie munie d'une involution laissant fixe le corps k (de façon plus précise un k-antiautomorphisme d'ordre deux $a \mapsto \bar{a}$ de A dans A).

Par exemple si G est un groupe fini et kG son algèbre de groupe (i.e. le k-espace vectoriel de base les éléments de G muni de la multiplication induite par celle de G), kG porte l'involution.

$$\overline{\textstyle\sum_{g\in G} \lambda_g\, g} = \textstyle\sum_{g\in G} \lambda_g\, g^{-1}$$

Si $\varepsilon = \pm 1$, *une forme ε-symétrique invariante (ou plus simplement une forme)* est un A module à gauche de génération finie M muni d'une forme bilinéaire, à valeurs dans k, ε-symétrique, non dégénérée et vérifiant $ax \cdot y = x \cdot \bar{a}y$ pour x, $y \in M$ et $a \in A$.

$W_\varepsilon(A)$ désigne le groupe de Witt des formes ε-symétriques invariantes. Il est le quotient du semigroupe (pour la somme orthogonale) des classes d'isomorphie de formes par la relation $M \sim N$ s'il existe X et Y des formes neutres avec $M \perp X \simeq N \perp Y$. ($\simeq$ désigne l'isomorphie de formes, $\perp$ la somme orthogonale, et une forme est *neutre* si elle admet un *métaboliseur*, c'est-à-dire un sous module égal à son orthogonal.)

Remarque. Une autre définition de forme neutre est obtenue en demandant que le métaboliseur soit sommand direct du module. Si l'algèbre est semisimple les deux définitions coïncident, mais sinon le groupe de Witt obtenu avec cette définition diffère sensiblement de celui qui est étudié ici.

rad A désigne l'idéal nilpotent maximal de A. On a donc que rad $A = \overline{\text{rad } A}$ et l'involution de A est aussi définie sur $A/\text{rad } A$.

Notre objectif dans ce paragraphe est de montrer

Théorème 1. $W_\varepsilon(A) = W_\varepsilon(A/\text{rad } A)$.

Pour cela deux résultats bien connus sont nécessaires et joueront un rôle essentiel par la suite:

Proposition 1. *Une forme équivalente à zéro est neutre.*

Preuve. Soit M une forme avec $M \perp H$ neutre de métaboliseur N, ceci pour H une forme neutre de métaboliseur H_0.

On peut rechoisir le métaboliseur de $M \perp H$ de façon à ce qu'il contienne H_0. Prenons L un sous module de $M \perp H$ maximal pour les conditions de contenir

H_0 et d'être contenu dans son orthogonal. Voyons que c'est en fait un métaboliseur :

Considérons $L + (N \cap L^\perp)$, qui est contenu dans son orthogonal. Par maximalité de L, $N \cap L^\perp \subset L$ et donc $L^\perp \subset (N \cap L^\perp)^\perp$. Mais il est clair que $A^\perp \cap B^\perp = (A+B)^\perp$. Ainsi, puisque $N = N^\perp$, nous obtenons $L^\perp \subset (N+L)^{\perp\perp} = N + L$.

Mais si $x = n + p$ est un élément de $L^\perp$ avec $n \in N$ et $p \in L$, on a $n \in L^\perp$, d'où $L^\perp \subset (N \cap L^\perp) + L = L$.

Regardons M_0 la projection de L sur M. Il s'agit d'un métaboliseur pour M :

Le noyau de cette projection est $L \cap H$. Or $L \cap H$ est auto-orthogonal (car L l'est), et contient H_0. Donc $L \cap H = H_0$. Nous avons donc la suite exacte

$$0 \to H_0 \to L \to M_0 \to 0$$

d'où

$$2 \dim M_0 = 2 \dim L - 2 \dim H_0 = \dim(M \perp H) - \dim H = \dim H$$

D'autre part la projection de L sur H est exactement H_0 : en effet, si $(x, a) \in L$, alors $(x, a) \cdot (0, b) = 0$ pour tout $b \in H_0$, puisque $H_0 \subset L$. Ainsi $a \cdot b = 0$ pour tout $b \in H_0$ et $a \in H_0$.

Il est clair maintenant que M_0 est auto-orthogonal : si x et $y \in M_0$ il existe a et $b \in H_0$ tels que (x, a) et $(y, b) \in L$. Donc

$$0 = (x, a) \cdot (y, b) = x \cdot y + a \cdot b = x \cdot y \qquad \square$$

La relation d'équivalence de $W_\varepsilon(A)$ peut maintenant se reécrire

$$M \sim N \Leftrightarrow M \perp (-N) \text{ est neutre.}$$

($-N$ désigne la forme opposée à celle de N, de même module.)

Remarque. Nous aurions pu définir la relation de $W_\varepsilon(A)$ comme nous venons de l'écrire. La proposition 1 est alors indispensable pour montrer la transitivité.

DÉFINITION. Une forme est dite *anisotrope* si tous ses sous modules sont non dégénérés.

PROPOSITION 2. *Il existe une forme anisotrope unique par classe d'équivalence de Witt.*

Preuve. Soit M une forme. Nous allons lui associer une forme équivalente et anisotrope. Si M est déjà anisotrope nous n'avons rien à faire. Sinon, soit N un sous module dégénéré, c'est-à-dire $N \cap N^\perp \neq 0$.

Posons $L = N \cap N^{\perp}$, qui vérifie $L \subset L^{\perp}$.

Le noyau de la forme sur $L^{\perp}$ est $L^{\perp} \cap L^{\perp\perp} = L^{\perp} \cap L = L$.

Ainsi $L^{\perp}/L$ est une forme, qui s'avère être Witt équivalente à M. En effet, un métaboliseur de $M \perp (-L^{\perp}/L)$ est $S = \{(x, [x]), x \in L^{\perp}\}$:

* $(x, [x]) \cdot (y, [y]) = x \cdot y + [x] \cdot [y] = x \cdot y - x \cdot y = 0$
* $\dim S = \dim L^{\perp}$, or

$\dim(M \perp (-L^{\perp}/L)) = \dim M + \dim L^{\perp} - \dim L = 2 \dim L^{\perp}$

(puisque $\dim M = \dim \mathrm{L} + \dim L^{\perp}$).

Nous pouvons recommencer le procédé avec $L^{\perp}/L$, puisque $\dim L^{\perp}/L < \dim M$. En un nombre fini d'étapes on aboutit à une forme anisotrope Witt équivalente à M.

Pour montrer l'unicité, soient V et W deux formes anisotropes et équivalentes, c'est-à-dire $V \perp (-W)$ est neutre de métaboliseur N.

Le sous module $N \cap V$ de V est auto-orthogonal et donc nul puisque V est anisotrope. De même pour $N \cap W = 0$.

Soit $\pi_v : N \to V$ l'homomorphisme de projection sur V, qui est injectif puisque $\operatorname{Ker} \pi_v = N \cap W$. Son image, $\pi_v N$, est non dégénérée car elle est sous module de V. Donc

$$V = \pi_v N \perp (\pi_v N)^{\perp}$$

Mais si $x \in (\pi_v N)^{\perp}$, alors $(x, 0) \in N^{\perp} = N$. Donc $x \in N \cap V = 0$. D'où $(\pi_v N)^{\perp} = 0$ et π_v est surjective.

De même π_w est un A isomorphisme.

Considérons la composition $\varphi = \pi_w \pi_v^{-1}$ qui est un A isomorphisme entre V et W. Il s'agit en fait d'une isométrie: en effet, si $\varphi(x) = a$, $\varphi(y) = b$, on a $(x, a) \in N$ et $(y, b) \in N$. Donc $(x, a) \cdot (y, b) = 0$ et $x \cdot y = a \cdot b$. $\square$

THÉORÈME 1. $W_{\varepsilon}(A) = W_{\varepsilon}(A/\mathrm{rad}A)$.

Preuve. Nous allons décrire une flèche canonique

$$F : W_{\varepsilon}(A) \to W_{\varepsilon}(A/\mathrm{rad}A)$$

puis montrer qu'il s'agit d'un isomorphisme de groupes abéliens.

Soit M une forme de $W_{\varepsilon}(A)$ et notons M_a l'unique forme anisotrope qui lui est Witt équivalente.

M_a est somme orthogonale de formes simples: en effet, si U est un sous module simple quelconque de M_a, il est non dégénéré. Donc $M_a = U \perp U^{\perp}$ et $U^{\perp}$ est anisotrope à son tour, car c'est un sous module d'un anisotrope.

M_a est donc de module semisimple, donc annulé par rad A, et nous pouvons poser $F(M) = M_a$.

Pour voir que F est un homomorphisme de groupes, soient M et N deux formes. Nous avons $(M \perp N)_a \sim M_a \perp N_a$ dans $W_\varepsilon(A)$, c'est-à-dire que leur différence est neutre dans $W_\varepsilon(A)$ et donc dans $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$. Ainsi l'équivalence a aussi lieu dans $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$ et $F(M \perp N) = F(M) \perp F(N)$.

F est *injective*: si $F(M) = M_a$ (qui est anisotrope) est neutre, cela implique $M_a = 0$. Or $M \sim M_a = 0$.

F est *surjective*: soit N une forme de $W_\varepsilon(A/\mathrm{rad}A)$ et N_a son représentant anisotrope. N_a est une forme de $W_\varepsilon(A)$ et son image par F est naturellement la classe de N_a qui est celle de N. □

§ 2 Réduction au groupe de Witt hermitien d'un corps gauche

Soit A une k-algèbre semisimple de dimension finie munie d'une involution laissant le corps k fixe.

Sa décomposition en produit d'algèbres simples est obtenue avec un système d'idempotents $\{e_i\}_{i=1\,\dots\,n}$ centraux, orthogonaux, primitifs et complets

$$A = Ae_i \times \dots \times Ae_n .$$

Un tel système est unique.

Or $\{\overline{e_i}\}$ est encore un système d'idempotents comme avant. Quitte à renuméroter, on suppose $\overline{e_i} = e_i$ pour $i = 1, \dots, r$ et $\overline{e_i} = e_j$, $j \neq i$, pour $i = r + 1, \dots, n$.

D'autre part chaque algèbre simple Ae_i possède un seul module simple U_i et cela fournit une liste complète et sans répétitions des A-modules simples.

Remarque. Si Λ est une k-algèbre avec involution, U un Λ module simple, $A = \Lambda/\mathrm{rad}\,\Lambda$ et e_i l'idempotent central pour lequel U est un Ae_i module simple, on a que

$$U \simeq U^* \Leftrightarrow e_i = \overline{e_i}$$

(où $U^* = \mathrm{Hom}_k(U, k)$, qui est un Λ module à gauche via $(a\varphi)(x) = \varphi(ax)$ pour $\varphi \in U^*$, $a \in A$ et $x \in U$).

Il suffit de remarquer que U^* est simple, et c'est en fait le module simple sur $A\overline{e_i}$.

LEMME. Pour $1 \leqslant i \leqslant r$, on a

$$W_\varepsilon(Ae_i) \hookrightarrow W_\varepsilon(A),$$

où Ae_i porte l'involution de A, c'est-à-dire $\overline{ae_i} = \overline{e_i}\,\overline{a} = e_i\,\overline{a} = \overline{a}\,e_i$.

Preuve. Une forme de $W_\varepsilon(Ae_i)$ est U_i-isotypique. Si elle est neutre dans $W_\varepsilon(A)$, elle admet un sous module égal à son orthogonal. Mais ce sous module d'un module semisimple est sommand direct et donc lui-même U_i-isotypique.

Cette forme est neutre dans $W_\varepsilon(Ae_i)$, ce qui montre l'injectivité.

PROPOSITION 3. $W_\varepsilon(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} W_\varepsilon(Ae_i)$.

Preuve. Pour voir que $W_\varepsilon(A)$ est la somme des sous groupes $W_\varepsilon(Ae_i)$ considérons le représentant anisotrope d'une forme.

Celui-ci est somme orthogonale de formes simples dont les modules se trouvent parmi $\{U, ..., Ur\}$: en effet, si U un module simple est muni d'une forme, elle fournit un isomorphisme de U avec U^*.

Pour voir que la somme est directe, supposons que $V_1 \perp ... \perp V_r$ est neutre, où V_i est une forme de $W_\varepsilon(Ae_i)$ pour $i = 1 ... r$. On a donc

$$-V_j \sim V_1 \perp ... \perp V_{j-1} \perp V_{j+1} \perp ... \perp V_r$$

pour tout j entre 1 et r.

La construction de la proposition 2 fournit pour

$$V_1 \perp ... \perp V_{j-1} \perp V_{j+1} \perp ... \perp V_r$$

un représentant anisotrope sans aucun sommand de module isomorphe à U_j.

Tandis que pour $-V_j$ nous obtenons un représentant anisotrope qui est U_j-isotypique.

Par l'unicité, ces deux représentants sont isomorphes en tant que formes, en particulier en tant que A modules. S'ils ne sont pas nuls, le théorème de Krull Schmidt est mis en défaut.

Les deux anisotropes sont donc nuls et $-V_j \sim 0$, donc $V_j \sim 0$ pour tout j entre 1 et r. □

Le calcul du groupe de Witt se réduit donc au cas d'une algèbre simple avec involution.

Soit donc A une k-algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution qui laisse le corps k fixe.

Soit U son unique A module simple et $D = \mathrm{End}_A U$ qui est un corps gauche, extension finie de k. (En fait $A \simeq M_n(D)$ pour n le nombre de sommands isomorphes à U dans une décomposition de A.)

Nous allons fabriquer une involution pour D à partir de celle de A, puis montrer:

THÉORÈME 2. $W_\varepsilon(A) \simeq WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, {}^-)$.

($\varepsilon_b = \pm 1$ sera précisé plus loin.

Si D est un corps gauche muni d'une involution ${}^-$, $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ désigne le groupe obtenu en faisant le quotient du semigroupe des classes d'isomorphie de formes ε-hermitiennes sur des D- espaces vectoriels à gauche de dimension finie, à valeurs dans D et non dégénérées, par la relation:

$M \sim N$ s'il existe des formes ε-hermitiennes neutres X et Y avec $M \perp X \simeq N \perp Y$.

(Une forme ε-hermitienne est *neutre* si elle admet un sous espace vectoriel égal à son orthogonal, i.e. un métaboliseur.)

On obtient tout de suite les deux propositions clés, pour lesquelles les démonstrations des propositions 2 et 3 restent valables dans ce contexte:

PROPOSITION 4. *Une forme ε-hermitienne Witt équivalente à zéro est neutre.*

DÉFINITION. Une forme ε-hermitienne est *anisotrope* si pour tout $x \neq 0$, $x \cdot x \neq 0$.

PROPOSITION 5. *Il existe une forme ε-hermitienne anisotrope unique par classe d'équivalence de Witt.*

Il est clair qu'une forme anisotrope est somme orthogonale de sous formes hermitiennes de dimension 1, qui engendrent donc $WH_\varepsilon(D, {}^-)$.

Mais une forme ε-hermitienne de dimension 1 est déterminée par un élément de $D_\varepsilon = \{x \in D^{\cdot} \text{ avec } \bar{x} = \varepsilon x\}$.

Nous avons donc montré le

COROLLAIRE 6. $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ *admet comme générateurs de groupe abélien les éléments de* $D^{\cdot}_\varepsilon$.

Construisons maintenant une involution sur le corps gauche d'endomorphismes du simple, puis nous pourrons prouver le théorème 2.

PROPOSITION 7. *Si A est une k-algèbre simple munie d'une involution, le corps gauche d'endomorphismes D de l'unique module simple U porte une involution, qui coïncide avec celle de A sur le centre.*

Preuve. Soit $U^* = \mathrm{Hom}_k(U, k)$ qui est un A module à gauche via $(a \cdot f)(x) = f(\bar{a}x)$. Il s'agit d'un A module simple non nul et donc isomorphe à U, puisque U est le seul A-module simple (à isomorphie près).

Considérons $L = \mathrm{Hom}_A(U, U^*)$, qui est donc un k-espace vectoriel non nul. Le groupe cyclique d'ordre 2, $\{1, t\}$, agit sur L:

$$\text{si} \quad b \in L, \qquad (tb)(x)_{(y)} = b(y)_{(x)}$$

L est donc un kC_2 module non nul. Si la caractéristique de k n'est pas deux, kC_2 est une algèbre semisimple et ne possède que deux modules simples T et A non isomorphes, tous deux de dimension 1 : pour T, t agit comme 1 ; pour A, t agit comme -1.

Ainsi $L = n_T\, T \oplus n_A\, A$, avec au moins un des deux naturels n_T ou n_A non nul.

Il existe donc un $b \in L$, $b \neq 0$ (et donc b est un isomorphisme), avec $tb = \varepsilon_b\, b$ où $\varepsilon_b = \pm 1$. Ce qui veut dire

$$b(x)_{(y)} = \varepsilon_b\, b(y)_{(x)}$$

Si la caractéristique de k est deux, kC_2 ne possède qu'un seul module simple qui est T. L n'est pas nécessairement un kC_2 module semisimple mais contient un sous kC_2 module simple. (Ainsi que tout module de génération finie sur une algèbre de k-dimension finie.)

Il existe donc $b \in L$, $b \neq 0$, avec $tb = b$.

En conclusion, et quelle que soit la caractéristique, il existe toujours $b \in L$, $b \neq 0$, avec

$$b(x)_{(y)} = \varepsilon_b\, b(y)_{(x)}, \qquad \text{avec} \quad \varepsilon_b = \pm 1$$

Remarque. Si possible b sera choisi de telle façon que $\varepsilon_b = 1$. Mais il se peut que L ne soit constitué que de formes antisymétriques (i.e. $n_A = 0$), auquel cas $\varepsilon_b = -1$.

L'involution de D se construit une fois le choix d'un tel b effectué:

Soit $f \in \mathrm{End}_A(U) = D$. f^* désigne le A-endomorphisme de U^* défini par $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$, *si* $\varphi \in U^*$.

Posons $\bar{f} = b^{-1} f^* b$. ($\bar{f}$ est l'unique A endomorphisme de U tel que $b(fx, y) = b(x, \bar{f}y)$, pour tout $x, y \in U$).

Assertion. $f \mapsto \bar{f}$ est une involution de D qui coïncide avec celle de A sur son centre.

Pour le vérifier il est commode d'identifier U avec U^{**} au moyen du A-isomorphisme qui à chaque $u \in U$ associe « l'évaluation en u » de U^{**}.

Ainsi $f^{**} = f$ et $b^* = \varepsilon_b\, b$.

$\bar{\bar{f}} = b^{-1}(b^{-1} f^* b)^* b = \varepsilon_b^2\, f = f$.

$\overline{fg} = b^{-1}(fg)^* b = b^{-1}\, g^*\, f^*\, b = b^{-1}\, g^*\, b\, b^{-1}\, f^*\, b = \bar{g}\,\bar{f}$.

Soit a un élément du centre de A et λ_a l'homothétie de rapport a qui est centrale dans D. Nous avons

$$\overline{\lambda_a} = b^{-1}(\lambda_a)^* b = b^{-1}\, \lambda_{\bar{a}}\, b = \lambda_{\bar{a}} .$$

En particulier k est laissé fixe par l'involution que nous venons de définir sur D. □

Nous pouvons maintenant aborder le

THÉORÈME 2. *Soit* A *une* k *algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution,* D *le corps gauche muni de l'involution* $\bar{f} = b^{-1}\, f^*\, b$, *où* b *est choisi dans* $\mathrm{Hom}_A(U, U^*)$ *avec* $b^* = \varepsilon_b\, b$. *Alors* $W_\varepsilon(A) \simeq WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$.

Preuve. Nous allons construire une flèche de groupes

$$F : W_\varepsilon(A) \to WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, {}^-)$$

puis montrer qu'elle est injective et surjective.

Soit M une forme de $W_\varepsilon(A)$. On note par c aussi bien la forme que le A isomorphisme $c : M \to M^*$ auquel elle donne lieu. ($c^* = \varepsilon c$.)

$\mathrm{Hom}_A(U, M)$ est un D espace vectoriel à gauche via $f \cdot \varphi = \varphi \circ \bar{f}$, si $f \in D$ et $\varphi \in \mathrm{Hom}_A(U, M)$. Considérons la forme:

$$\mathrm{Hom}_A(U, M) \times \mathrm{Hom}_A(U, M) \to \mathrm{End}_A\, U = D$$

$$(\varphi, \psi) \mapsto \varphi \cdot \psi = b^{-1}\, \varphi^*\, c\, \psi$$

Elle est $\varepsilon\varepsilon_b$ hermitienne:

$$\overline{\psi \cdot \varphi} = b^{-1}(b^{-1}\psi^* c \varphi)^* b = b^{-1}\, \varphi^*\, c^*\, \psi\, b^{*-1}\, b$$
$$= \varepsilon\varepsilon_b\, b^{-1}\, \varphi^*\, c\, \psi = \varepsilon\varepsilon_b\, \varphi \cdot \psi$$

Elle est sesquilinéaire en la deuxième variable:

$$\varphi \cdot f\, \psi = \varphi \cdot \psi \circ \bar{f} = b^{-1}\, \varphi^*\, c\, \psi\, \bar{f} = (\varphi \cdot \psi)\bar{f}$$

Elle est non dégénérée: si $\varphi \cdot \psi = 0$ pour tout ψ, alors $\varphi^*\, c\, \psi = 0$ pour tout ψ. Mais $\varphi^*\, c\, \psi = c(\varphi(-), \psi(-))$. Puisque M est U-isotypique, choisissons une décomposition $M = U \oplus \ldots \oplus U$. Prenons pour ψ chacune des inclusions de U auxquelles, cette décomposition donne lieu. Nous obtenons $c(\varphi(-), m) = 0$, $\forall m \in M$, d'où $\varphi = 0$.

Posons donc $FM = \mathrm{Hom}_A(U, M)$ muni de cette forme. Il nous faut voir que si M est neutre, FM l'est aussi :

Soit N le métaboliseur de M. $\mathrm{Hom}_A(U, N)$ est donc un sous D espace vectoriel de dimension moitié celle de FM, et en fait est autorthogonal : en effet, $\varphi^* \, c \, \psi = c(\varphi(-), \psi(-))$, et si φ et ψ sont à valeurs dans N, alors $\varphi \cdot \psi = 0$.

F est injective : supposons que FM est neutre de métaboliseur X. Or les sous espaces de $\mathrm{Hom}_A(U, M)$ sont tous de la forme $\mathrm{Hom}_A(U, N)$ pour N un sous A module de M. C'est donc le cas pour X et le N obtenu est de k-dimension moitié celle de M. Il est en fait autorthogonal, ce qui montrera que M est neutre : nous savons que $\varphi^* \, c \, \psi = c(\varphi(-), \psi(-)) = 0$, pour tous φ et $\psi \in \mathrm{Hom}_A(U, N)$. N est U-isotypique, choisissons une décomposition $N = U \oplus \ldots \oplus U$. En prenant pour φ et ψ les inclusions de U obtenues avec cette décomposition, on obtient que $c(n_1, n_2) = 0$, pour tout $n_1, n_2 \in N$.

F est surjective : nous avons vu (corollaire 6) que les éléments de $D^{\cdot}_{\varepsilon\varepsilon_b} = \{x \in D^{\cdot} \ tq \ \bar{x} = \varepsilon\varepsilon_b \, x\}$ engendrent $WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, {}^-)$.

Soit donc $a \in D^{\cdot}_{\varepsilon\varepsilon_b}$.

Considérons la forme $U \xrightarrow{ba} U^*$ qui est ε-symétrique :

$$(ba)^* = a^* \, b^* = \varepsilon_b \, \overline{ba} \, b^{-1} \, b = \varepsilon_b^2 \, \varepsilon \, ba = \varepsilon \, ba \, .$$

L'image de sa classe dans $W_\varepsilon(A)$ par F est une forme sur $\mathrm{End}_A \, U$ dont la valeur sur (Id_u, Id_u) est $b^{-1} \, Id_u^* \, ba \, Id_u = a$.

Les générateurs de $WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, {}^-)$ sont atteints par F qui est donc surjective.

□

En mettant bout à bout les résultats obtenus, nous pouvons énoncer le résultat global suivant :

THÉORÈME 3. *Soit A une k-algèbre de dimension finie, munie d'une involution. Soit $U_1, \ldots, U_n$ une liste complète et sans répétitions des A modules simples (à isomorphie près), numérotés de telle façon que*

1) $U_i \simeq U_i^*$ *pour* $i \leqslant r \leqslant n$, *et* $U_j \not\simeq U_j^*$ *si* $j > r$.
2) *Pour* $i \leqslant s \leqslant r$, $\mathrm{Hom}_A(U_i, U_i^*)$ *contient le* kC_2 *module trivial (c.f. proposition 7) et ne le contient pas pour* $i > s$. *C'est-à-dire que pour* $s < i \leqslant r$, $\mathrm{Hom}_A(U_i, U_i^*)$ *est constitué entièrement de morphismes antisymétriques.*

Soient $D_1, \ldots, D_r$ les corps gauches d'endomorphismes de $U_1, \ldots, U_r$ munis d'une involution fabriquée comme à la proposition 7. Alors

$$W_\varepsilon(A) = \bigoplus_{i=1}^{s} WH_\varepsilon(D_i, {}^-) \oplus \bigoplus_{j=s+1}^{r} WH_{-\varepsilon}(D_j, {}^-) \, .$$

Remarque. Le choix d'un $b \in Hom_A(U_i, U_i^*)$ de la proposition 7 pour obtenir une involution sur D_i est en fait irrelevant : deux choix différents peuvent donner lieu à des involutions non isomorphes mais aux mêmes groupes de Witt, puisque tous deux sont isomorphes à $W_\varepsilon(Ae_i)$ si $i \leqslant s$, à $W_{-\varepsilon}(Ae_i)$ si $s < i \leqslant r$.

§ 3. Présentation du groupe de Witt hermitien d'un corps gauche

Soit D un corps gauche muni d'une involution qui n'est pas forcément l'identité sur le centre et $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ le groupe de Witt des ε-formes hermitiennes. (Définition au § 2.)

Si $a \in D^\cdot_\varepsilon = \{x \in D^\cdot \mid \bar{x} = \varepsilon x\}$, $< a >$ désigne le D espace vectoriel à gauche de dimension un De, muni de la forme ε-hermitienne $e \cdot e = a$.

Au corollaire 6 nous avons montré que l'homomorphisme de groupes abéliens φ défini par :

$$\varphi : \mathbf{Z}[D^\cdot_\varepsilon] \to WH_\varepsilon(D, {}^-)$$
$$[a] \mapsto < a >$$

est surjectif. $\mathbf{Z}[D^\cdot_\varepsilon]$ désigne le groupe abélien libre sur les éléments de $D^\cdot_\varepsilon$, notés alors entre crochets.

Théorème 4. *Le noyau de φ est égal au sous groupe N de $\mathbf{Z}[D^\cdot_\varepsilon]$ engendré par*

1) $[a] - [xa\bar{x}]$, $\forall a \in D^\cdot_\varepsilon$, $\forall x \in D^\cdot$
2) $[a] + [-a]$, $\forall a \in D^\cdot_\varepsilon$
3) $[a] + [b] - [a+b] - [a(a+b)^{-1}b]$,
   $\forall a, b \in D^\cdot_\varepsilon$ avec $a + b \neq 0$.

Ce théorème fournit donc une présentation par générateurs et relations de $WH_\varepsilon(D, {}^-)$.

Nous allons d'abord montrer un résultat intermédiaire.

PROPOSITION 8. *Le noyau de* φ *est égal au sous groupe* P *de* $\mathbf{Z}[D^{\cdot}_{\varepsilon}]$ *engendré par*

1) $[a] - [xa\bar{x}]$, $\forall a \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$, $\forall x \in D^{\cdot}$
2) $[a] + [-a]$, $\forall a \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$
3) $[a] + [b] - [c] - [d]$, $\forall a, b, c, d \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$ tels que $< a > \perp < b > \simeq < c > \perp < d >$.

Puis nous verrons que $P = N$, ce qui achèvera la preuve du théorème 4.

Il est clair que $P \subset \operatorname{Ker} \varphi$: il suffit de remarquer que $< a > \simeq < xa\bar{x} >$, et que $< a > \perp < -a >$ est neutre.

Le fait que $\operatorname{Ker} \varphi \subset P$ repose sur le lemme suivant:

LEMME. Soient $a_1, ..., a_n \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$ et supposons que la forme ε-hermitienne $< a_1 > \perp ... \perp < a_n >$ est isotrope (c'est-à-dire il existe un vecteur non nul x avec $x \cdot x = 0$).

Il existe alors $c_1, ..., c_m \in D^{\cdot}_{\varepsilon}$, $m < n$, tels que

$$\sum_1^n [a_i] \equiv \sum_1^m [c_j] \bmod P .$$

Preuve. Si l'on écrit $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, où e_i est la base de $< a_i >$, $x \cdot x = 0$ se traduit par $x_1 a_1 \bar{x}_1 + ... + x_n a_n \bar{x}_n = 0$.

Eliminons les sommands nuls et renumérotons:

(*): $x_1 a_1 \bar{x}_1 + ... + x_k a_k \bar{x}_k = 0$, avec $k \geqslant 2$ puisque $x \neq 0$.

Si $k = 2$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_1^n [a_i] &= [a_1] - [x_1 a_1 \bar{x}_1] + [x_1 a_1 \bar{x}_1] + [x_2 a_2 \bar{x}_2] \\ &\qquad + [a_2] - [x_2 a_2 \bar{x}_2] + \sum_3^n [a_i] \\ &\equiv \sum_3^n [a_i] \bmod P\end{aligned}$$

et le lemme est démontré.

Supposons par récurrence que le lemme est vrai chaque fois que l'isotropie nous fournit une relation (*) de longueur $k - 1$.

Nous avons $x_1 a_1 \bar{x}_1 + ... + x_k a_k \bar{x}_k = 0$.

Posons $b_1 = x_1 a_1 \bar{x}_1 + x_2 a_2 \bar{x}_2$. Si $b_1 = 0$, l'hypothèse de recurrence dit que le lemme est vrai. Si $b_1 \neq 0$, considérons la forme ε hermitienne

$$< b_1 > \perp < a_3 > \perp \ldots \perp < a_n > .$$

Elle est isotrope avec $b_1 + x_3 a_3 \bar{x}_3 + \ldots + x_k a_k \bar{x}_k = 0$.

Par récurrence, $[b_1] + [a_3] + \ldots + [a_n] \equiv \sum_1^m [c_j] \bmod P$, $m < n - 1$.

Or il existe $b_2 \in D_\varepsilon^{\cdot}$ avec

$$< a_1 > \perp < a_2 > \simeq < b_1 > \perp < b_2 > ,$$

puisque $< b_1 >$ est un sous espace vectoriel non dégénéré (engendré par $x_1 e_1 + x_2 e_2$) de $< a_1 > \perp < a_2 >$. Il suffit de prendre son orthogonal pour obtenir $< b_2 >$.

Donc

$$[a_1] + [a_2] + \sum_3^n [a_i] \equiv [b_1] + [b_2] + \sum_3^n [a_i] \bmod P ,$$

grâce aux générateurs de type 3) de P.

Mais

$$[b_1] + [b_2] + \sum_3^n [a_i] \equiv [b_2] + \sum_3^m [c_j] \bmod P ,$$

et $m + 1 < n$, puisque l'on avait $m < n - 1$. □

Montrons maintenant Ker $\varphi \subset P$, ce qui prouve la proposition 8.

Si $\lambda = \sum_i n_i [a_i] \in$ Ker φ, écrivons

$$\lambda = \sum_k [U_k] + \sum_j - [V_j] \equiv \sum_k [U_k] + \sum_j [-V_j] \pmod P .$$

Il suffit donc de montrer que si $\sum_1^n [a_i] \in$ Ker φ, alors $\sum_1^n [a_i] \equiv 0 \bmod P$.

$\perp_1^n < a_i >$ est neutre, en particulier isotrope. Le lemme dit que

$$\sum_1^n [a_i] \equiv \sum_1^m [c_j] \pmod P$$

et avec $m < n$.

Mais $\sum_1^m [c_j]$ est aussi dans le noyau de φ, puisque $P \subset$ Ker φ. Le procédé peut être recommencé, avec les longueurs des expressions diminuant vraiment à chaque application.

D'où $\sum_1^n [a_i] \equiv 0 \pmod P$. □

Il nous reste à voir que $N = P$ pour obtenir le théorème 4.

Pour montrer que $N \subset P$, il suffit de voir que les générateurs de type 3) de N sont dans P. En fait ce sont directement des générateurs de type 3) de P, c'est-à-dire:

Assertion. $< a > \perp < b > \simeq < a+b > \perp < a(a+b)^{-1}b >$,
$\forall a, b \in D_\varepsilon^{\cdot}$, avec $a + b \neq 0$.

Preuve. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & bc \\ -1 & ac \end{pmatrix}$, où $c = (a+b)^{-1}$. Son inverse est $A' = \begin{pmatrix} ac & -bc \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En effet,

$$AA' = \begin{pmatrix} ac + bc & 0 \\ 0 & bc + ac \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A réalise donc une surjection entre deux D-espaces de dimension 2, A est donc aussi injective et $A'A = Id$. Vérifions le quand même:

$$A'A = \begin{pmatrix} ac + bc & bcac - acbc \\ 0 & bc + ac \end{pmatrix}$$

Il est effectivement vrai que $bca - acb = 0$, pour tout $a, b \in D^{\cdot}$ avec $a + b \neq 0$ et $c = (a+b)^{-1}$:

$$\begin{aligned} bca - acb &= bca + bcb - bcb - acb \\ &= b(ca+cb) - (bc+ac)b \\ &= b - b = 0 . \end{aligned}$$

Cette matrice A réalise l'isomorphisme entre les deux formes ε-hermitiennes:

$$A^t \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \overline{A} = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & acb \end{pmatrix}$$

Vérification. $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & cb \\ -1 & ca \end{pmatrix}$ puisque $\overline{bc} = \overline{c}\,\overline{b} = \varepsilon^2 cb = cb$.

$$A^t B \overline{A} = \begin{pmatrix} a + b & acb - bca \\ bca - acb & bcacb + acbca \end{pmatrix}$$

En utilisant le fait que $acb = bca$, on obtient bien $\begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & acb \end{pmatrix}$. □

Il s'agit maintenant de montrer que $P \subset N$, problème qui se réduit à montrer que, si $< a > \perp < b > \simeq < c > \perp < d >$, l'expression $[a] + [b] - [c] - [d]$ est nulle modulo N.

Preuve. c est une valeur de la forme $< a > \perp < b >$. Il existe donc x et y non simultanément nuls tels que $c = x\,a\,\bar{x} + y\,b\,\bar{y}$.

Cas 1. Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Nous avons que

$$< a > \perp < b > \perp < -c > \perp < -d >$$

est neutre. Donc

$$< a > \perp < b > \perp < -xa\bar{x} - yb\bar{y} > \perp < -d >$$

est neutre. Mais

$$< a > \simeq < xa\bar{x} > \text{ et } < b > \simeq < yb\bar{y} >$$

Ainsi

(*): $< xa\bar{x} > \perp < yb\bar{y} > \perp < -xa\bar{x} - yb\bar{y} > \perp < -d >$ est neutre.
D'autre part, l'assertion que nous venons prouver nous dit que

$$< xa\bar{x} > \perp < yb\bar{y} > \simeq < xa\bar{x} + yb\bar{y} > \perp < xa\bar{x}(xa\bar{x}+yb\bar{y})^{-1}yb\bar{y} > .$$

(Ce dernier sommand orthogonal sera noté $< g >$.)

En rajoutant $< -xa\bar{x} - yb\bar{y} >$ des deux côtés on obtient

$$< xa\bar{x} > \perp < yb\bar{y} > \perp < -xa\bar{x} - yb\bar{y} > \simeq < xa\bar{x} + yb\bar{y} > \perp$$
$$< -xa\bar{x} - yb\bar{y} > \perp < g >$$

Or $< xa\bar{x} + yb\bar{y} > \perp < -xa\bar{x} - yb\bar{y} >$ est neutre. Par la définition même de l'équivalence de $WH_\varepsilon(D, {}^-)$ on obtient

$$< xa\bar{x} > \perp < yb\bar{y} > \perp < -xa\bar{x} - yb\bar{y} > \sim < g > .$$

En revenant maintenant à (*) on trouve: $< g > \perp < -d >$ est neutre. Ce qui veut dire qu'il existe un vecteur non nul $ue_1 + ve_2$ avec $(ue_1 + ve_2) \cdot (ue_1 + ve_2) = 0$, c'est-à-dire que

$$ug\bar{u} - vd\bar{v} = 0 \Rightarrow d = v^{-1}ug\overline{uv^{-1}} = sg\bar{s}$$

pour $s = v^{-1}u$.

Nous pouvons maintenant prouver que

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv 0 \bmod N:$$

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv [xa\bar{x}] + [yb\bar{y}] - [xa\bar{x} + yb\bar{y}] - [d]$$
$$\equiv [g] - [d] \equiv [g] - [sg\bar{s}] \equiv 0 \pmod N .$$

Cas 2. Si $y = 0$. De toute façon $< a > \perp < b > \perp < -c > \perp < -d >$ est neutre, donc

$$< a > \perp < b > \perp < -xa\bar{x} > \perp < -d >$$

est neutre. Or $< a > \perp < -xa\bar{x} >$ est neutre, donc $< b > \perp < -d >$ est neutre et nous venons de voir que dans ce cas il existe s avec $d = sb\bar{s}$. D'où

$$[a] + [b] - [c] - [d] \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, N)\,.$$

Cas 3. Si $x = 0$, qui se traite comme le cas 2. $\square$

Exemple. Soit D l'algèbre de quaternions sur un corps k de caractéristique différente de deux, engendré par les éléments i et j vérifiant $i^2 = \alpha$, $j^2 = \beta$, $ij = -ji$ où α et β sont des éléments de k qui ne sont pas des carrés,

$$D = k \oplus ki \oplus kj \oplus kij\,.$$

Nous voulons de plus que D soit un corps gauche, c'est-à-dire que la forme bilinéaire de matrice diagonale $< 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta >$ ne représente pas 0.

Soit $\bar{\ }$ l'involution standard de D: $\bar{i} = -i$, $\bar{j} = -j$. Cette involution est d'ailleurs définie sans référence à la base de quaternions de D choisie: soit $I = \{z \in D^{\cdot} \mid z^2 \in k \text{ et } z \notin k\}$, l'ensemble des imaginaires purs. L'involution standard change le signe des imaginaires purs et laisse fixe k.

Il est facile de voir que toute autre involution $\hat{\ }$ s'obtient de la façon suivante: soit $a \in I$ et complétons le en une base de quaternions, c'est-à-dire en un $b \in I$ avec $ab = -ba$. L'involution est donnée par $\hat{a} = -a$, $\hat{b} = b$. Deux involutions ainsi construites avec a et $a' \in I$ sont isomorphes si et seulement si les sous corps commutatifs maximaux $k + ka$ et $k + ka'$ sont isomorphes.

Comme le remarque D. W. LEWIS, A note on hermitian and quadratic forms, *Bull. Lond. Math. Soc.*, *11* (1979), les formes hermitiennes sur D pour $\hat{\ }$ sont en bijection avec les formes antihermitiennes sur D pour l'involution standard. (La bijection est donnée par la multiplication par a.) Cela fournit un isomorphisme $WH_{-1}(D, \hat{\ }) \simeq WH_{+1}(D, \bar{\ })$. De même $WH_{+1}(D, \hat{\ }) \simeq WH_{-1}(D, \bar{\ })$.

La présentation de $WH_\varepsilon(D, \bar{\ })$ peut être précisée pour D un corps de quaternions:

$$WH_{+1}(D, \bar{\ }) = \mathbf{Z}[k^{\cdot}]/N_1$$

où N_1 est le sous groupe de $\mathbf{Z}[k^{\cdot}]$ engendré par

1) $[a] - [ax\bar{x}], \forall a \in k^{\cdot}, \forall x \in D^{\cdot}$

2) $[a] + [-a], \forall a \in k^{\cdot}$

3) $[a] + [b] - [a + b] - [ab(a+b)]$,

$\forall a, b \in k^{\cdot}$ avec $a + b \neq 0$.

$$WH_{-1}(D, \bar{\ }) = \mathbf{Z}[I]/N_{-1}$$

où N_{-1} est le sous groupe de $\mathbf{Z}[I]$ engendré par

1) $[a] - [xa\bar{x}], \forall a \in I, \forall x \in D^{\cdot}$

2) $[a] + [-a], \forall a \in I$

3) $[a] + [b] - [a + b] - [a(a+b)^{-1}b]$,

$\forall a, b \in I$ avec $a + b \neq 0$.

Lorsque $D = H$ le corps des quaternions sur les réels, ($k = \mathbf{R}$, $i^2 = j^2 = -1$), il est clair que $WH_{+1}(H, \bar{\ }) = \mathbf{Z}$. (La relation 2 identifie les deux générateurs de $\mathbf{Z}[\mathbf{R}^{\cdot}/\mathbf{R}^{\cdot 2}]$.)

Pour obtenir $WH_{-1}(H, \bar{\ })$ il suffit de remarquer que $xi\bar{x}$ décrit tous les imaginaires purs lorsque x parcourt H. Un calcul simple montre que cela revient à trouver deux nombres complexes dont la différence des normes et le produit sont fixés, ce qui est toujours possible.

Ainsi le nombre de générateurs de $WH_{-1}(H, \bar{\ })$ est réduit à un, et la relation 2) dit qu'il est d'ordre 2. $WH_{-1}(H, \bar{\ }) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Si maintenant k est un corps local de caractéristique différente de deux, il est connu qu'il existe un seul corps de quaternions D sur k et que $\{x\bar{x}, x \in D^{\cdot}\} = k^{\cdot}$. Nous en tirons immédiatement que $WH_{+1}(D, \bar{\ }) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

(Reçu le 3 juin 1982)

Claude Cibils

Section de Mathématique
Université de Genève
Case 124
CH-1211 Genève 24