

# §2 Réduction au groupe de Witt hermitien d'un corps gauche

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

$M_a$  est donc de module semisimple, donc annulé par  $\text{rad } A$ , et nous pouvons poser  $F(M) = M_a$ .

Pour voir que  $F$  est un homomorphisme de groupes, soient  $M$  et  $N$  deux formes. Nous avons  $(M \perp N)_a \sim M_a \perp N_a$  dans  $W_\varepsilon(A)$ , c'est-à-dire que leur différence est neutre dans  $W_\varepsilon(A)$  et donc dans  $W_\varepsilon(A/\text{rad}A)$ . Ainsi l'équivalence a aussi lieu dans  $W_\varepsilon(A/\text{rad}A)$  et  $F(M \perp N) = F(M) \perp F(N)$ .

$F$  est *injective*: si  $F(M) = M_a$  (qui est anisotrope) est neutre, cela implique  $M_a = 0$ . Or  $M \sim M_a = 0$ .

$F$  est *surjective*: soit  $N$  une forme de  $W_\varepsilon(A/\text{rad}A)$  et  $N_a$  son représentant anisotrope.  $N_a$  est une forme de  $W_\varepsilon(A)$  et son image par  $F$  est naturellement la classe de  $N_a$  qui est celle de  $N$ .  $\square$

## § 2 RÉDUCTION AU GROUPE DE WITT HERMITIEN D'UN CORPS GAUCHE

Soit  $A$  une  $k$ -algèbre semisimple de dimension finie munie d'une involution laissant le corps  $k$  fixe.

Sa décomposition en produit d'algèbres simples est obtenue avec un système d'idempotents  $\{e_i\}_{i=1 \dots n}$  centraux, orthogonaux, primitifs et complets

$$A = Ae_1 \times \dots \times Ae_n.$$

Un tel système est unique.

Or  $\{\overline{e_i}\}$  est encore un système d'idempotents comme avant. Quitte à renuméroter, on suppose  $\overline{e_i} = e_i$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $\overline{e_i} = e_j$ ,  $j \neq i$ , pour  $i = r + 1, \dots, n$ .

D'autre part chaque algèbre simple  $Ae_i$  possède un seul module simple  $U_i$  et cela fournit une liste complète et sans répétitions des  $A$ -modules simples.

*Remarque.* Si  $\Lambda$  est une  $k$ -algèbre avec involution,  $U$  un  $\Lambda$  module simple,  $A = \Lambda/\text{rad } \Lambda$  et  $e_i$  l'idempotent central pour lequel  $U$  est un  $Ae_i$  module simple, on a que

$$U \simeq U^* \Leftrightarrow e_i = \overline{e_i}$$

(où  $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$ , qui est un  $\Lambda$  module à gauche via  $(a\varphi)(x) = \varphi(ax)$  pour  $\varphi \in U^*$ ,  $a \in A$  et  $x \in U$ ).

Il suffit de remarquer que  $U^*$  est simple, et c'est en fait le module simple sur  $\overline{Ae_i}$ .

LEMME. Pour  $1 \leq i \leq r$ , on a

$$W_{\varepsilon}(Ae_i) \hookrightarrow W_{\varepsilon}(A),$$

où  $Ae_i$  porte l'involution de  $A$ , c'est-à-dire  $\overline{ae_i} = \overline{e_i a} = e_i \overline{a} = \overline{a} e_i$ .

*Preuve.* Une forme de  $W_{\varepsilon}(Ae_i)$  est  $U_i$ -isotypique. Si elle est neutre dans  $W_{\varepsilon}(A)$ , elle admet un sous module égal à son orthogonal. Mais ce sous module d'un module semisimple est sommand direct et donc lui-même  $U_i$ -isotypique.

Cette forme est neutre dans  $W_{\varepsilon}(Ae_i)$ , ce qui montre l'injectivité.

PROPOSITION 3. 
$$W_{\varepsilon}(A) = \bigoplus_{i=1}^r W_{\varepsilon}(Ae_i).$$

*Preuve.* Pour voir que  $W_{\varepsilon}(A)$  est la somme des sous groupes  $W_{\varepsilon}(Ae_i)$  considérons le représentant anisotrope d'une forme.

Celui-ci est somme orthogonale de formes simples dont les modules se trouvent parmi  $\{U, \dots, Ur\}$ : en effet, si  $U$  un module simple est muni d'une forme, elle fournit un isomorphisme de  $U$  avec  $U^*$ .

Pour voir que la somme est directe, supposons que  $V_1 \perp \dots \perp V_r$  est neutre, où  $V_i$  est une forme de  $W_{\varepsilon}(Ae_i)$  pour  $i = 1 \dots r$ . On a donc

$$-V_j \sim V_1 \perp \dots \perp V_{j-1} \perp V_{j+1} \perp \dots \perp V_r$$

pour tout  $j$  entre 1 et  $r$ .

La construction de la proposition 2 fournit pour

$$V_1 \perp \dots \perp V_{j-1} \perp V_{j+1} \perp \dots \perp V_r$$

un représentant anisotrope sans aucun sommand de module isomorphe à  $U_j$ .

Tandis que pour  $-V_j$  nous obtenons un représentant anisotrope qui est  $U_j$ -isotypique.

Par l'unicité, ces deux représentants sont isomorphes en tant que formes, en particulier en tant que  $A$  modules. S'ils ne sont pas nuls, le théorème de Krull Schmidt est mis en défaut.

Les deux anisotropes sont donc nuls et  $-V_j \sim 0$ , donc  $V_j \sim 0$  pour tout  $j$  entre 1 et  $r$ . □

Le calcul du groupe de Witt se réduit donc au cas d'une algèbre simple avec involution.

Soit donc  $A$  une  $k$ -algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution qui laisse le corps  $k$  fixe.

Soit  $U$  son unique  $A$  module simple et  $D = \text{End}_A U$  qui est un corps gauche, extension finie de  $k$ . (En fait  $A \simeq M_n(D)$  pour  $n$  le nombre de sommands isomorphes à  $U$  dans une décomposition de  $A$ .)

Nous allons fabriquer une involution pour  $D$  à partir de celle de  $A$ , puis montrer :

THÉORÈME 2.  $W_\varepsilon(A) \simeq WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, \bar{\phantom{x}})$ .

( $\varepsilon_b = \pm 1$  sera précisé plus loin.)

Si  $D$  est un corps gauche muni d'une involution  $\bar{\phantom{x}}$ ,  $WH_\varepsilon(D, \bar{\phantom{x}})$  désigne le groupe obtenu en faisant le quotient du semigroupe des classes d'isomorphie de formes  $\varepsilon$ -hermitiennes sur des  $D$ -espaces vectoriels à gauche de dimension finie, à valeurs dans  $D$  et non dégénérées, par la relation :

$M \sim N$  s'il existe des formes  $\varepsilon$ -hermitiennes neutres  $X$  et  $Y$  avec  $M \perp X \simeq N \perp Y$ .

(Une forme  $\varepsilon$ -hermitienne est *neutre* si elle admet un sous espace vectoriel égal à son orthogonal, i.e. un métaboliseur.)

On obtient tout de suite les deux propositions clés, pour lesquelles les démonstrations des propositions 2 et 3 restent valables dans ce contexte :

PROPOSITION 4. Une forme  $\varepsilon$ -hermitienne Witt équivalente à zéro est neutre.

DÉFINITION. Une forme  $\varepsilon$ -hermitienne est *anisotrope* si pour tout  $x \neq 0$ ,  $x \cdot x \neq 0$ .

PROPOSITION 5. Il existe une forme  $\varepsilon$ -hermitienne anisotrope unique par classe d'équivalence de Witt.

Il est clair qu'une forme anisotrope est somme orthogonale de sous formes hermitiennes de dimension 1, qui engendrent donc  $WH_\varepsilon(D, \bar{\phantom{x}})$ .

Mais une forme  $\varepsilon$ -hermitienne de dimension 1 est déterminée par un élément de  $D_\varepsilon = \{x \in D \text{ avec } \bar{x} = \varepsilon x\}$ .

Nous avons donc montré le

COROLLAIRE 6.  $WH_\varepsilon(D, \bar{\phantom{x}})$  admet comme générateurs de groupe abélien les éléments de  $D_\varepsilon$ .

Construisons maintenant une involution sur le corps gauche d'endomorphismes du simple, puis nous pourrons prouver le théorème 2.

PROPOSITION 7. Si  $A$  est une  $k$ -algèbre simple munie d'une involution, le corps gauche d'endomorphismes  $D$  de l'unique module simple  $U$  porte une involution, qui coïncide avec celle de  $A$  sur le centre.

*Preuve.* Soit  $U^* = \text{Hom}_k(U, k)$  qui est un  $A$  module à gauche via  $(af)(x) = f(\bar{a}x)$ . Il s'agit d'un  $A$  module simple non nul et donc isomorphe à  $U$ , puisque  $U$  est le seul  $A$ -module simple (à isomorphie près).

Considérons  $L = \text{Hom}_A(U, U^*)$ , qui est donc un  $k$ -espace vectoriel non nul. Le groupe cyclique d'ordre 2,  $\{1, t\}$ , agit sur  $L$ :

$$\text{si } b \in L, \quad (tb)(x)_{(y)} = b(y)_{(x)}$$

$L$  est donc un  $kC_2$  module non nul. Si la caractéristique de  $k$  n'est pas deux,  $kC_2$  est une algèbre semisimple et ne possède que deux modules simples  $T$  et  $A$  non isomorphes, tous deux de dimension 1 : pour  $T$ ,  $t$  agit comme 1 ; pour  $A$ ,  $t$  agit comme  $-1$ .

Ainsi  $L = n_T T \oplus n_A A$ , avec au moins un des deux naturels  $n_T$  ou  $n_A$  non nul.

Il existe donc un  $b \in L$ ,  $b \neq 0$  (et donc  $b$  est un isomorphisme), avec  $tb = \varepsilon_b b$  où  $\varepsilon_b = \pm 1$ . Ce qui veut dire

$$b(x)_{(y)} = \varepsilon_b b(y)_{(x)}$$

Si la caractéristique de  $k$  est deux,  $kC_2$  ne possède qu'un seul module simple qui est  $T$ .  $L$  n'est pas nécessairement un  $kC_2$  module semisimple mais contient un sous  $kC_2$  module simple. (Ainsi que tout module de génération finie sur une algèbre de  $k$ -dimension finie.)

Il existe donc  $b \in L$ ,  $b \neq 0$ , avec  $tb = b$ .

En conclusion, et quelle que soit la caractéristique, il existe toujours  $b \in L$ ,  $b \neq 0$ , avec

$$b(x)_{(y)} = \varepsilon_b b(y)_{(x)}, \quad \text{avec } \varepsilon_b = \pm 1$$

*Remarque.* Si possible  $b$  sera choisi de telle façon que  $\varepsilon_b = 1$ . Mais il se peut que  $L$  ne soit constitué que de formes antisymétriques (i.e.  $n_A = 0$ ), auquel cas  $\varepsilon_b = -1$ .

L'involution de  $D$  se construit une fois le choix d'un tel  $b$  effectué :

Soit  $f \in \text{End}_A(U) = D$ .  $f^*$  désigne le  $A$ -endomorphisme de  $U^*$  défini par  $f^*(\varphi) = \varphi \circ f$ , si  $\varphi \in U^*$ .

Posons  $\bar{f} = b^{-1} f^* b$ . ( $\bar{f}$  est l'unique  $A$  endomorphisme de  $U$  tel que  $b(fx, y) = b(x, \bar{f}y)$ , pour tout  $x, y \in U$ ).

*Assertion.*  $f \mapsto \bar{f}$  est une involution de  $D$  qui coïncide avec celle de  $A$  sur son centre.

Pour le vérifier il est commode d'identifier  $U$  avec  $U^{**}$  au moyen du  $A$ -isomorphisme qui à chaque  $u \in U$  associe « l'évaluation en  $u$  » de  $U^{**}$ .

Ainsi  $f^{**} = f$  et  $b^* = \varepsilon_b b$ .

$$\bar{f} = b^{-1}(b^{-1}f^*b)^*b = \varepsilon_b^2 f = f.$$

$$\overline{fg} = b^{-1}(fg)^*b = b^{-1}g^*f^*b = b^{-1}g^*bb^{-1}f^*b = \bar{g}\bar{f}.$$

Soit  $a$  un élément du centre de  $A$  et  $\lambda_a$  l'homothétie de rapport  $a$  qui est centrale dans  $D$ . Nous avons

$$\overline{\lambda_a} = b^{-1}(\lambda_a)^*b = b^{-1}\lambda_a b = \lambda_a.$$

En particulier  $k$  est laissé fixe par l'involution que nous venons de définir sur  $D$ . □

Nous pouvons maintenant aborder le

**THÉORÈME 2.** *Soit  $A$  une  $k$  algèbre simple de dimension finie, munie d'une involution,  $D$  le corps gauche muni de l'involution  $\bar{f} = b^{-1}f^*b$ , où  $b$  est choisi dans  $\text{Hom}_A(U, U^*)$  avec  $b^* = \varepsilon_b b$ . Alors  $W_\varepsilon(A) \simeq WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$ .*

*Preuve.* Nous allons construire une flèche de groupes

$$F : W_\varepsilon(A) \rightarrow WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$$

puis montrer qu'elle est injective et surjective.

Soit  $M$  une forme de  $W_\varepsilon(A)$ . On note par  $c$  aussi bien la forme que le  $A$  isomorphisme  $c : M \rightarrow M^*$  auquel elle donne lieu. ( $c^* = \varepsilon c$ .)

$\text{Hom}_A(U, M)$  est un  $D$  espace vectoriel à gauche via  $f \cdot \varphi = \varphi \circ \bar{f}$ , si  $f \in D$  et  $\varphi \in \text{Hom}_A(U, M)$ . Considérons la forme :

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(U, M) \times \text{Hom}_A(U, M) &\rightarrow \text{End}_A U = D \\ (\varphi, \psi) &\mapsto \varphi \cdot \psi = b^{-1} \varphi^* c \psi \end{aligned}$$

Elle est  $\varepsilon\varepsilon_b$  hermitienne :

$$\begin{aligned} \overline{\psi \cdot \varphi} &= b^{-1}(b^{-1}\psi^*c\varphi)^*b = b^{-1}\varphi^*c^*\psi b^{*-1}b \\ &= \varepsilon\varepsilon_b b^{-1}\varphi^*c\psi = \varepsilon\varepsilon_b \varphi \cdot \psi \end{aligned}$$

Elle est sesquilinéaire en la deuxième variable :

$$\varphi \cdot f \psi = \varphi \cdot \psi \circ \bar{f} = b^{-1}\varphi^*c\psi \bar{f} = (\varphi \cdot \psi) \bar{f}$$

Elle est non dégénérée : si  $\varphi \cdot \psi = 0$  pour tout  $\psi$ , alors  $\varphi^* c \psi = 0$  pour tout  $\psi$ . Mais  $\varphi^* c \psi = c(\varphi(-), \psi(-))$ . Puisque  $M$  est  $U$ -isotypique, choisissons une décomposition  $M = U \oplus \dots \oplus U$ . Prenons pour  $\psi$  chacune des inclusions de  $U$  auxquelles, cette décomposition donne lieu. Nous obtenons  $c(\varphi(-), m) = 0$ ,  $\forall m \in M$ , d'où  $\varphi = 0$ .

Posons donc  $FM = \text{Hom}_A(U, M)$  muni de cette forme. Il nous faut voir que si  $M$  est neutre,  $FM$  l'est aussi :

Soit  $N$  le métaboliseur de  $M$ .  $\text{Hom}_A(U, N)$  est donc un sous  $D$  espace vectoriel de dimension moitié celle de  $FM$ , et en fait est autorthogonal : en effet,  $\varphi^* c \psi = c(\varphi(-), \psi(-))$ , et si  $\varphi$  et  $\psi$  sont à valeurs dans  $N$ , alors  $\varphi \cdot \psi = 0$ .

$F$  est injective : supposons que  $FM$  est neutre de métaboliseur  $X$ . Or les sous espaces de  $\text{Hom}_A(U, M)$  sont tous de la forme  $\text{Hom}_A(U, N)$  pour  $N$  un sous  $A$  module de  $M$ . C'est donc le cas pour  $X$  et le  $N$  obtenu est de  $k$ -dimension moitié celle de  $M$ . Il est en fait autorthogonal, ce qui montrera que  $M$  est neutre : nous savons que  $\varphi^* c \psi = c(\varphi(-), \psi(-)) = 0$ , pour tous  $\varphi$  et  $\psi \in \text{Hom}_A(U, N)$ .  $N$  est  $U$ -isotypique, choisissons une décomposition  $N = U \oplus \dots \oplus U$ . En prenant pour  $\varphi$  et  $\psi$  les inclusions de  $U$  obtenues avec cette décomposition, on obtient que  $c(n_1, n_2) = 0$ , pour tout  $n_1, n_2 \in N$ .

$F$  est surjective : nous avons vu (corollaire 6) que les éléments de  $D_{\varepsilon\varepsilon_b} = \{x \in D \text{ tq } \bar{x} = \varepsilon\varepsilon_b x\}$  engendrent  $WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$ .

Soit donc  $a \in D_{\varepsilon\varepsilon_b}$ .

Considérons la forme  $U \xrightarrow{ba} U^*$  qui est  $\varepsilon$ -symétrique :

$$(ba)^* = a^* b^* = \varepsilon_b \bar{ba} b^{-1} b = \varepsilon_b^2 \varepsilon ba = \varepsilon ba.$$

L'image de sa classe dans  $W_\varepsilon(A)$  par  $F$  est une forme sur  $\text{End}_A U$  dont la valeur sur  $(Id_u, Id_u)$  est  $b^{-1} Id_u^* ba Id_u = a$ .

Les générateurs de  $WH_{\varepsilon\varepsilon_b}(D, -)$  sont atteints par  $F$  qui est donc surjective.  $\square$

En mettant bout à bout les résultats obtenus, nous pouvons énoncer le résultat global suivant :

**THÉORÈME 3.** *Soit  $A$  une  $k$ -algèbre de dimension finie, munie d'une involution. Soit  $U_1, \dots, U_n$  une liste complète et sans répétitions des  $A$  modules simples (à isomorphie près), numérotés de telle façon que*

- 1)  $U_i \simeq U_i^*$  pour  $i \leq r \leq n$ , et  $U_j \not\simeq U_j^*$  si  $j > r$ .
- 2) Pour  $i \leq s \leq r$ ,  $\text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$  contient le  $kC_2$  module trivial (c.f. proposition 7) et ne le contient pas pour  $i > s$ . C'est-à-dire que pour  $s < i \leq r$ ,  $\text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$  est constitué entièrement de morphismes antisymétriques.

Soient  $D_1, \dots, D_r$  les corps gauches d'endomorphismes de  $U_1, \dots, U_r$  munis d'une involution fabriquée comme à la proposition 7. Alors

$$W_\varepsilon(A) = \bigoplus_{i=1}^s WH_\varepsilon(D_i, -) \oplus \bigoplus_{j=s+1}^r WH_{-\varepsilon}(D_j, -).$$

*Remarque.* Le choix d'un  $b \in \text{Hom}_A(U_i, U_i^*)$  de la proposition 7 pour obtenir une involution sur  $D_i$  est en fait irrelevant : deux choix différents peuvent donner lieu à des involutions non isomorphes mais aux mêmes groupes de Witt, puisque tous deux sont isomorphes à  $W_\varepsilon(Ae_i)$  si  $i \leq s$ , à  $W_{-\varepsilon}(Ae_i)$  si  $s < i \leq r$ .

§ 3. PRÉSENTATION DU GROUPE DE WITT HERMITIEN  
D'UN CORPS GAUCHE

Soit  $D$  un corps gauche muni d'une involution qui n'est pas forcément l'identité sur le centre et  $WH_\varepsilon(D, \bar{\phantom{x}})$  le groupe de Witt des  $\varepsilon$ -formes hermitiennes. (Définition au § 2.)

Si  $a \in D_\varepsilon = \{x \in D \mid \bar{x} = \varepsilon x\}$ ,  $\langle a \rangle$  désigne le  $D$  espace vectoriel à gauche de dimension un  $De$ , muni de la forme  $\varepsilon$ -hermitienne  $e \cdot e = a$ .

Au corollaire 6 nous avons montré que l'homomorphisme de groupes abéliens  $\varphi$  défini par :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{Z}[D_\varepsilon] &\rightarrow WH_\varepsilon(D, \bar{\phantom{x}}) \\ [a] &\mapsto \langle a \rangle \end{aligned}$$

est surjectif.  $\mathbf{Z}[D_\varepsilon]$  désigne le groupe abélien libre sur les éléments de  $D_\varepsilon$ , notés alors entre crochets.

THÉORÈME 4. *Le noyau de  $\varphi$  est égal au sous groupe  $N$  de  $\mathbf{Z}[D_\varepsilon]$  engendré par*

- 1)  $[a] - [xax], \forall a \in D_\varepsilon, \forall x \in D$
- 2)  $[a] + [-a], \forall a \in D_\varepsilon$
- 3)  $[a] + [b] - [a+b] - [a(a+b)^{-1}b],$   
 $\forall a, b \in D_\varepsilon$  avec  $a + b \neq 0$ .

Ce théorème fournit donc une présentation par générateurs et relations de  $WH_\varepsilon(D, \bar{\phantom{x}})$ .

Nous allons d'abord montrer un résultat intermédiaire.