

# Contents

Objekttyp: **Abstract**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **29 (1983)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **21.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

REPRESENTATIONS OF THE SYMMETRIC GROUP,  
THE SPECIALIZATION ORDER, SYSTEMS  
AND GRASSMANN MANIFOLDS <sup>1)</sup>

by Michiel HAZEWINKEL and Clyde F. MARTIN <sup>2)</sup>

ABSTRACT

A certain partial order on the set of all partitions of a given natural number  $n$  describes many containment, specialization or degeneration relations in the, seemingly, rather disparate parts of mathematics dealing with permutation representations of  $S_n$ , the existence of  $(0, 1)$ -matrices with prescribed row and column sums, symmetric mean inequalities, orbits of nilpotent matrices under similarity, Kronecker indices of control systems, doubly stochastic matrices and vectorbundles over the Riemann sphere. In this paper we discuss relations between all these subjects which show why the same ordering *must* appear all the time. Central to the discussion is the Schubert-cell decomposition of a Grassmann manifold and the associated (closure) ordering which is a quotient of the Bruhat ordering on the Weyl group  $S_n$ .

CONTENTS

1. Introduction . . . . .	54
2. Several Manifestations of the specialization order . . . . .	56
3. Grassmann manifolds and classifying vectorbundles . . . . .	59
4. Schubert cells . . . . .	60
5. Interrelations . . . . .	62
6. Young's rule, the specialization order, and nilpotent matrices . . .	65

---

<sup>1)</sup> The bulk of the research for this paper was done while the second author was in residence at Erasmus University. The hospitality of Erasmus University is gratefully acknowledged.

<sup>2)</sup> Supported in part by NASA Grant # 2384, ONR Contract # NOOO 14-80C-0199 and DOE Contract # DE-AC01-80RA5256.

7.	Nilpotent matrices and systems . . . . .	67
8.	Vectorbundles and systems . . . . .	73
9.	Vectorbundles, systems and Schubert cells . . . . .	76
10.	Deformations of representation homomorphisms and sub- representations . . . . .	81
11.	A family of representations of $S_{n+m}$ parametrized by $G_n(\mathbb{C}^{n+m})$ . .	82

## 1. INTRODUCTION

Let  $\kappa$  be a partition of  $n$ ,  $\kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_m)$ ,  $\kappa_1 \geq \dots \geq \kappa_m \geq 0$ ,  $\sum \kappa_i = n$ . We identify partitions  $(\kappa_1, \dots, \kappa_m)$  and  $(\kappa_1, \dots, \kappa_m, 0, \dots, 0)$ . Quite a few classes of objects in mathematics are of course classified by partitions and often inclusion, specialization or degeneration relations between these objects are described by a certain partial order on the set of partitions. This partial order on the set of all partitions of  $n$  is defined as follows:

$$(1.1) \quad (\kappa_1, \dots, \kappa_m) > (\kappa'_1, \dots, \kappa'_m)$$

$$\text{iff } \sum_{i=1}^r \kappa_i \leq \sum_{i=1}^r \kappa'_i, \quad r = 1, \dots, m.$$

Thus, for example  $(2, 2, 1) > (3, 2)$ . If  $\kappa > \kappa'$  we say that  $\kappa$  specializes to  $\kappa'$  or that  $\kappa$  is more general than  $\kappa'$ . The reverse order has been variously called the dominance order [2], the Snapper order [34, 41] or the natural order [35]. It occurs naturally in several seemingly rather unrelated parts of mathematics. Some of these occurrences are the

- (i) Snapper, Liebler-Vitale, Lam, Young theorem (on the permutation representations of the symmetric groups)
- (ii) Gale-Ryser theorem (on existence of  $(0, 1)$ -matrices)
- (iii) Muirhead's inequality (a symmetric mean inequality)
- (iv) Gerstenhaber-Hesselink theorem (on orbit closure properties of  $SL_n$  acting on nilpotent matrices)
- (v) Kronecker indices (on the orbit closure, or degeneration, properties of linear control systems acted on by the so-called feedback group)